T$^{\text{erm}}$S

Devoir surveillé

durée : 1h30

3 décembre 2018

Devoir surveillé à rendre sur copie double. Rendre le sujet avec la copie. Nom :

Exercice 1 (ROC) — 3 points

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0 ($f(0) = 1$).
L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité d'une telle fonction.

1. Montrer que la fonction $h(x) = f(x) \times f(-x)$ est une constante et que cette constante est 1.

2. Supposez qu'il existe 2 fonctions f et g vérifiant ces conditions, montrer alors que ces fonctions sont les mêmes en étudiant les variations de $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exercice 2 — 9 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

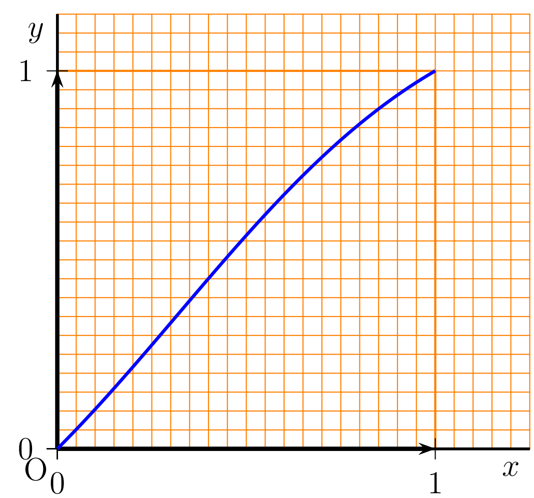
1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$.
La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-contre.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.



1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 3 — 8 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2 - 5\mathrm{i}$ et B le point d'affixe $7 - 3\mathrm{i}$.
Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$.
Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4. Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\mathrm{i} + z| = 1 + |z|$.

T$^{\text{erm}}$S

Devoir surveillé

3 décembre 2018

durée : 1h30

Devoir surveillé à rendre sur copie double. Rendre le sujet avec la copie. Nom :

Exercice 1 (ROC) — 3 points

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0 ($f(0) = 1$).
L'objectif de cet exercice est de montrer l'unicité d'une telle fonction.

1. Montrer que la fonction $h(x) = f(x) \times f(-x)$ est une constante et que cette constante est 1.

2. Supposez qu'il existe 2 fonctions f et g vérifiant ces conditions, montrer alors que ces fonctions sont les mêmes en étudiant les variations de $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exercice 2 — 9 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \text{e}^x - x - 1$.

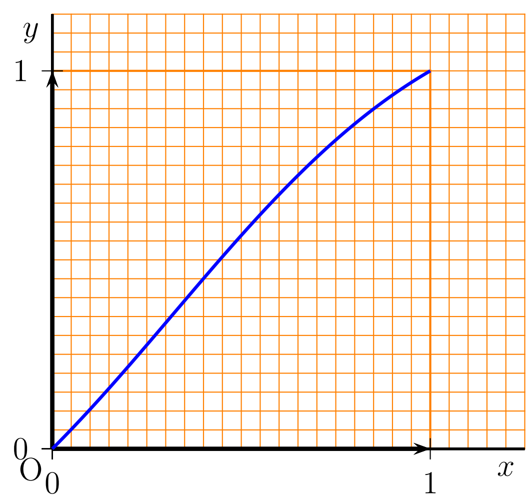
1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\text{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x - x}$.
La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-contre.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.



1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\text{e}^x - x}$.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 3 — 8 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2 - 5\text{i}$ et B le point d'affixe $7 - 3\text{i}$.
Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \text{i}| = |z + 2\text{i}|$.
Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit $z = 3 + \text{i}\sqrt{3}$.
Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4. Soit z un nombre complexe non nul.
Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\text{i} + z| = 1 + |z|$.