

Devoir surveillé

durée : 2h00

Devoir surveillé à rendre sur copie. Les résultats devront être **encadrés**. La présentation et la rédaction de la copie seront prise en compte dans l'évaluation de la copie (1 point).

EXERCICE 1 ROC

2 points

Démontrer que si A et B sont des événements indépendants alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B

EXERCICE 2

5 points

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$, où a , b et c sont trois réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2 - 2i, \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2 + 2i.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

EXERCICE 3

6 points

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$,

$$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

- b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$,

$$S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

- c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4u_5$.

EXERCICE 4**5 points**

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n -ième sondage est positif » est noté V_n , on note p_n la probabilité de l'évènement V_n .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

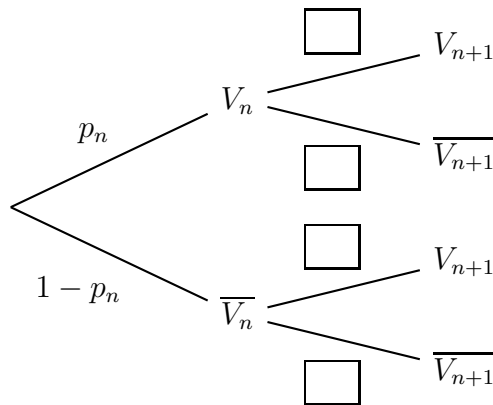
a. Calculer les probabilités des évènements suivants :

- A : « les 2^e et 3^e sondages sont positifs » ;
- B : « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».

b. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e sondage soit positif.

c. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



d. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

e. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

- Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
- Exprimer p_n en fonction de n .
- Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n .