Devoir surveillé

durée : 1h30

Devoir surveillé à rendre sur copie. Les résultats devront être **encadrés**. La présentation et la rédaction de la copie seront prise en compte dans l'évaluation de la copie (1 point).

Exercice 1 **6 points**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles I considérés :

1. $f(x) = \sqrt{5x-3}$ sur $I = \left]\dfrac{3}{5}, +\infty\right[$.

2. $f(x) = (5x-3)^4$ sur $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{5x-3}$ sur $I = \left]-\infty, \dfrac{3}{5}\right[\cup \left]\dfrac{3}{5}, +\infty\right[$.

Exercice 2 **5 points**

1. ROC : Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$.

2. Application : Déterminer la limite des suites définies par :

a. $u_n = \left(\sqrt{3}+1\right)^n$ **b.** $v_n = \dfrac{1}{1.01^n}$

3. Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3n+\cos(n)}{n}$

Exercice 3 **8 points**

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

— la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}$.

— la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.