DS (31 janvier 2020)

Exercice 1

Affirmation 1 :

Si $z = 1+i$, alors $z - i = 1 + i - i$ et $i(z+1) = i(1+i+1)$

$= 1$

$= i(2+i)$

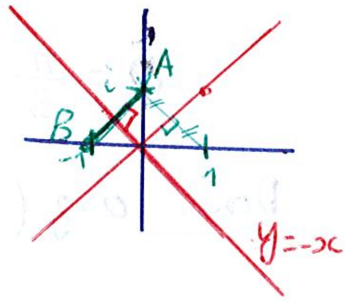
$= 2i + i^2$

$= 2i - 1$

D'où $z - i \neq i(z+1)$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 2 :



- Soit $M(z)$ tel que $|z-i| = |z+1|$

alors $|z - i| = |z - (-1)|$

Donc M est sur la médiatrice de $[AB]$

avec $A(i)$ et $B(-1)$

Ainsi M est sur la droite d'équation $y = -x$

- Autre démonstration

Soit $M(z)$ tel que $|z-i| = |z+1|$

Si $z = x+iy$, on a : $|x+iy-i| = |x+iy+1|$

$|x+i(y-1)| = |(x+1)+iy|$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$x^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+y^2$

$x^2+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2$

$-2y = 2x$

$y = \frac{2x}{-2}$

$\boxed{y = -x}$

$\boxed{\text{VRAI}}$

Affirmation 3 :

- L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle

Soit $a \in \mathbb{R}$, supposons a solution de l'équation, on a alors :

$a^5 + a - i + 1 = 0$

$\underbrace{a^5 + a + 1} + \underbrace{(-1)}i = \underbrace{0} + \underbrace{0}i$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même parties réelles et imaginaires. Donc $a^5 + a + 1 = 0$ et $-1 = 0$. Ce qui est impossible. Donc l'équation n'a pas de solution réelle $\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 4 :

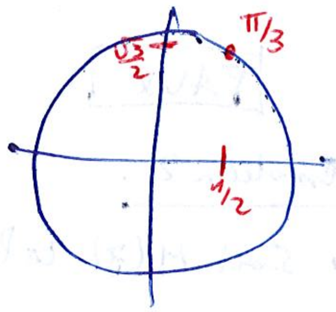
$$\arg\left((1+i\sqrt{3})^{2019}\right) = 2019 \arg(1+i\sqrt{3}) \ [2\pi]$$

Calculons l'argument θ de $1+i\sqrt{3}$:

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\theta = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$$

Donc $\arg\left((1+i\sqrt{3})^{2019}\right) = 2019 \times \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

$$= 673\pi \ [2\pi]$$

$$= 336 \times 2\pi + \pi \ [2\pi]$$

$$= \pi \ [2\pi]$$

$\boxed{\text{FAUX}}$

Exercice 2

Partie A

1. Plus les minutes avancent, et plus la température du café diminue, on peut donc conjecturer que la suite (T_n) est décroissante.

2. a) On sait que $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$

d'où $T_{n+1} - T_n = -0,2T_n + 2$

ainsi $T_{n+1} = 1T_n - 0,2T_n + 2$

donc $T_{n+1} = T_n(1-0,2) + 2$

Par conséquent $\boxed{T_{n+1} = 0,8\,T_n + 2}$

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: " $T_n \geq 10$ "

Initialisation : $T_0 = 80$, donc $T_0 \geq 10$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}_{k+1}$.

Comme $\mathcal{P}_k$ est supposée vraie, on a : $T_k \geq 10$

d'où $0,8\,T_k \geq 8$

ainsi $0,8\,T_k + 2 \geq 8 + 2$

Donc $T_{k+1} \geq 10$

Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \geq 10$

c) $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$

Or $T_n \geq 10$ d'après 2. b)

d'où $T_n - 10 \geq 0$

donc $-0,2(T_n - 10) \leq 0 \times (-0,2)$ (car $-0,2$ négatif)

Ainsi $T_{n+1} - T_n \leq 0$ Donc (T_n) est décroissante

d) • la suite (T_n) est décroissante
• la suite (T_n) est minorée par 10 } Donc la suite (T_n) converge

Notons l la limite de (T_n). Comme $T_{n+1} = 0,8\,T_n + 2$

En faisant $n \to +\infty$, on obtient : $l = 0,8\,l + 2$

d'où $l - 0,8\,l = 2$

$0,2\,l = 2$

$l = \dfrac{2}{0,2}$

$\boxed{l = 1}$

3. a

$T (=80)$	$n (=0)$
66	1
54,8	2
45,84	3
38,672	4

A la fin de l'exécution du programme ; la variable n vaut 4.

b. Interprétation :
Au bout de 4 min, la température du café passe en dessous de 40°C.

Partie B.

1. a. $t \mapsto \theta(t)$ et $t \mapsto e^{-0,2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{-0,2t} \neq 0$

Donc $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = \frac{\theta'(t) e^{-0,2t} - \theta(t) \times (-0,2 e^{-0,2t})}{(e^{-0,2t})^2}$$

$u = \theta(t)$
$u' = \theta'(t) = -0,2(\theta(t))$
$v = e^{-0,2t}$
$v' = -0,2 e^{-0,2t}$

$$f'(t) = \frac{-0,2\theta(t) e^{-0,2t} + 0,2\theta(t) e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t})^2}$$

$$f'(t) = \frac{0}{(e^{-0,2t})^2} = 0$$

b. $f(0) = \dfrac{\theta(0)}{e^{-0,2\times 0}} = \dfrac{80}{1} = 80$

f est une fonction dont la dérivée vaut 0, Donc f est constante.
Or $f(0) = 80$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 80$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}} = 80$

Donc $\boxed{\theta(t) = 80 \times e^{-0,2t}}$

c. Si $\theta(t) = 80 \times e^{-0,2t}$
alors $\theta(0) = 80 \times e^{-0,2\times 0} = 80$ et $\theta'(t) = 80 \times (-0,2) e^{-0,2t}$

$\theta'(t) = -16 e^{-0,2t}$

$-0,2\theta(t) = -0,2 \times 80 e^{-0,2t}$

$-0,2\theta(t) = -16 e^{-0,2t}$

Donc on a bien : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$ et $\theta(0) = 80$

La fonction θ est bien solution du problème.

2. $g(t) = 10 + 70e^{-0,2t}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 0 + 70 \times (-0,2)e^{-0,2t}$

$g'(t) = -14e^{-0,2t}$

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
-14	$-$
$e^{-0,2t}$	$+$
$g'(t)$	$-$
$g(t)$	$\boxed{80} \searrow \boxed{0}$

$g(0) = 10 + 70e^{-0,2 \times 0}$

$g(0) = 10 + 70e^{0}$

$g(0) = 10 + 70 = 80$

- g est continue sur $[0;+\infty[$ (car dérivable sur $[0;+\infty[$)
- g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
- 40 compris entre $g(0) = \boxed{80}$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \boxed{0}$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(t) = 40$ admet une unique solution t_0

A l'aide de la calculatrice, on trouve $t_0 \simeq 4,2365$ min

Soit $t_0 \simeq 4,2365 \times 60$ sec

$\boxed{t_0 \simeq 254 \text{ s}}$

3. $g(t) = 10 + 70e^{-0,2t}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,2t = \boxed{-\infty} \\ \lim\limits_{X \to \boxed{-\infty}} e^{X} = 0 \end{array}\right\}$ Donc par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,2t} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} 10 + 70e^{-0,2t} = 10$ (par produit puis somme)

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 10}$ $\boxed{\text{Ainsi la courbe de la fonction } g \text{ admet une asymptote (en } +\infty) \text{ d'équation } y = 10}$