Comment démontrer qu'une suite est géométrique :

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 4v_n + 1$.
On s'intéresse alors à la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = v_n + \frac{1}{3}$.
Montrer que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.

Etape 1 : Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Soit n un entier naturel :

$$u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{3}$$

On remplace v_{n+1} par son expression en fonction de v_n

$$u_{n+1} = 4v_n + 1 + \frac{1}{3}$$

On remplace v_n par son expression en fonction de u_n

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 4v_n + 1 + \frac{1}{3} \\
u_{n+1} &= 4\left(u_n - \frac{1}{3}\right) + 1 + \frac{1}{3} \text{ car } v_n = u_n - \frac{1}{3} \\
u_{n+1} &= 4u_n - \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \\
u_{n+1} &= 4u_n
\end{aligned}$$

Etape 2 : Identifier l'éventuelle raison de la suite :

On vérifie qu'il existe un réel q indépendant de la variable n tel que, pour tout entier naturel n,$u_{n+1} = q \times u_n$.
En posant $q = 4$, on a bien, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$

Etape 3 : Conclure sur la nature de la suite :

Si il existe un réel q indépendant de la variable n tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$, on peut conclure que la suite est géométrique de raison q. On précise alors son premier terme.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 4. Son premier terme vaut :

$$u_0 = v_0 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Exercice d'entraînement :

On a : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + 3$, $u_n = v_n - 4$ et $v_0 = 5$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison