Chap 11 : Variable aléatoire

A. OLLIVIER

Terminale

Exemple

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire qui prend les valeurs -2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu.
Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux. Alors la variable aléatoire peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.
En effet, on a par exemple avec $X + Y = 0$ avec
$(X = 2) \cap (Y = -2)$

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on pourra calculer :
$P(X + Y = 5) = P((X = 1) \cap (Y = 4)) + P((X = 2) \cap (Y = 3))$
On cherche toutes les sommes égales 5.
Si de plus, les évènements et sont indépendants, alors on a :
$P(X + Y = 5) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 3)$

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires. La loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X+Y$ est donnée par :

$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P((X=i)\cap(Y=j))$$

Si de plus les événements X et Y sont indépendants, alors on a : $P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i)(Y=j)$

Exemple

- $P(X+Y=2)=\sum_{i+j=2} P\left((X=i)\cap(Y=j)\right)=P((X=0)\cap(Y=2))+P((X=1)\cap(Y=1))+P((X=2)\cap(Y=0))$
- $P(X+Y=1)=\sum_{i+j=1} P\left((X=i)\cap(Y=j)\right)=P((X=0)\cap(Y=1))+P((X=1)\cap(Y=0))$

Exemple

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- La 2ème partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €. Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.

La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire Y désigne les gains à la 2ème partie.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

SOMME $S = X + Y$		**X**	
		1	2
Y	-5		
	1		
	2		

Ainsi on a :

$$\bullet P(S=-4) = P((X=1)\cap(Y=-5))$$
$$= P(X=1)P(Y=-5) \text{ (en effet X et Y sont indépendantes)}$$

$$\bullet P(S=-3) = P(X=2)P(Y=-5)$$

•$P(S=1)=P(X=1)P(Y=1)$
•$P(S=3)=P(X=1)P(Y=2)+P(X=2)P(Y=1)$
•$P(S=4)=P(X=2)P(Y=2)$
On peut présenter la loi de probabilité de S dans un tableau :

k	-4	-3	2	3	4
$P(S=k)$					

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) =$$

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$$

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$$

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$$

Remarque

C'est la moyenne des valeurs prises par la v.a. X, pondérées par les probabilités qu'ont ces valeurs de se produire.

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$$

Remarque

C'est la moyenne des valeurs prises par la v.a. X, pondérées par les probabilités qu'ont ces valeurs de se produire.
Un jeu tel que $E(X) = 0$ est dit

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_i avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i)$$

Remarque

C'est la moyenne des valeurs prises par la v.a. X, pondérées par les probabilités qu'ont ces valeurs de se produire.
Un jeu tel que $E(X) = 0$ est dit équitable.

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

x_i		
p_i		

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

x_i	2	
p_i		

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

x_i	2	
p_i	$\frac{1}{2}$	

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) =$$

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + (-6) \times \frac{1}{2}$$

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + (-6) \times \frac{1}{2} = 1 + (-3)$$

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

x_i	2	-6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{2} + (-6) \times \frac{1}{2} = 1 + (-3) = -2$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$E(aX) = \ldots\ldots$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad E(aX+Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$$

Démonstration :

Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Démonstration :

Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ la propriété est évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.

Démonstration :

Ici, on démontrera que la 2$^{\text{ième}}$ et 3$^{\text{ième}}$ propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Démonstration :

Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$. En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2$^{\text{ième}}$ et 3$^{\text{ième}}$ propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i)$$

Démonstration :

Ici, on démontrera que la 2$^{\text{ième}}$ et 3$^{\text{ième}}$ propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i)$$

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X)$$

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$. En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X) \qquad \blacksquare$$

Propriété à démontrer : « $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$ »

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$. En notant $x_1; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X) \quad \blacksquare$$

Propriété à démontrer : « $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX + Y) = E(aX) + E(Y)$

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X) \quad \blacksquare$$

Propriété à démontrer : « $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX + Y) = E(aX) + E(Y)$ donc
$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$.

Démonstration :
Ici, on démontrera que la 2[ième] et 3[ième] propriété :

Pour $a = 0$ propriété évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ ssi, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi,

$$E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X) \quad \blacksquare$$

Propriété à démontrer : « $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX + Y) = E(aX) + E(Y)$ donc
$E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$. $\blacksquare$

Exemple

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

Exemple

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient X_1 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape

Exemple

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient X_1 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape et X_2 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la seconde étape. Dans ces conditions, on a $X = X_1 + X_2$.

Exemple

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient X_1 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape et X_2 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la seconde étape. Dans ces conditions, on a $X = X_1 + X_2$.
- On étudie ensuite les lois de probabilité de X_1 et X_2.

x_i		
$P(X_1 = x_i)$		

x_i	-6	
$P(X_1 = x_i)$		

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$		

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i		
$P(X_2 = x_i)$		

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	
$P(X_2 = x_i)$		

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$		

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires :

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = \dots$ et $E(X_2) = \dots$.

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = \ldots$.

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion on a $E(X) =$

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion on a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) =$

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion on a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -1 + 2$

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion on a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -1 + 2 = 1$

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a

$V(X) =$

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i$

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :
$V(X) =$

x_i		
p_i		

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i).$$

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$V(X) =$

x_i	-6	
p_i		

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$V(X) =$

x_i	-6	2
p_i		

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$V(X) =$

x_i	-6	2
p_i	$\frac{1}{2}$	

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$V(X) =$

x_i	-6	2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$V(X) = (-6-(-2))^2 \times \frac{1}{2} + (2-(-2))^2 \times \frac{1}{2}$$

x_i	-6	2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Définition

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

Exemple

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.

La variance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$V(X) = (-6-(-2))^2 \times \frac{1}{2} + (2-(-2))^2 \times \frac{1}{2} = 16$

x_i	-6	2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = \ldots\ldots \quad \text{et} \quad V(aX+b) = \ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = \ldots\ldots\ldots$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente.

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1; \ldots x_n$ les valeurs prises pas X,

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition, $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition, $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$

Donc $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - aE(X))^2 P(aX_i = ax_i)$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition, $V(aX) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$

D'où $V(aX) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^2 (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1 ; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1 ; ...ax_n$.

Par définition, $V(aX) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$

D'où $V(aX) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^2(x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$

Ainsi $V(aX) = a^2 \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i) = a^2 V(X)$ ■

Exemple

On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) =$

Exemple

On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) = 4^2 V(X) =$

Exemple

On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times 16$

Exemple

On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times 16 = 256$

Définition

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, ...E_n$. On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$: $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$

Définition

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, ...E_n$. On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$: $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$

Propriété (Admise)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :

$$V(X+Y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Définition

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, ...E_n$. On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$: $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$

Propriété (Admise)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$:

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc

  $V(X_1) =$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc
  $$V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2$$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$:

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc

  $V(X_2) =$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc
$V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc
$V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) =$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) =$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 50 + 16$

Exemple

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 50 + 16 = 66$.