# Chapitre 10 : Variables aléatoires

## 1 Somme de variables aléatoires

**Définition**

On appelle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $X$, toute fonction de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque issue un nombre réel.

**Exemple**

On considère deux jeux dont les gains sont donnés :

- pour le premier jeu, par la variable aléatoire $X$ qui prend les valeurs 1 et 2.
- pour le second jeu, par la variable aléatoire $Y$ qui prend les valeurs -2, 3 et 4.

Par exemple, l'évènement $(X = 1) \cap (Y = -2)$ signifie qu'on a gagné 1 € au premier jeu et perdu 2 € au deuxième jeu. Considérons la variable aléatoire somme $X + Y$ donnant le gain total cumulé aux deux jeux. Alors la variable aléatoire peut prendre les valeurs : -1, 0, 4, 5 et 6.

En effet, on a par exemple avec $X + Y = 0$ avec $(X = 2) \cap (Y = -2)$

Par ailleurs, pour calculer par exemple, la probabilité de l'évènement $X + Y = 5$, on pourra calculer : $P(X + Y = 5) = P((X = 1) \cap (Y = 4)) + P((X = 2) \cap (Y = 3))$

On cherche toutes les sommes égales 5.

Si de plus, les évènements et sont indépendants, alors on a : $P(X + Y = 5) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 3)$

**Définition**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires. La loi de probabilité de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$

Si de plus les événements $X$ et $Y$ sont indépendants, alors on a : $P(X + Y = k) = \sum\limits_{i+j=k} P(X = i)(Y = j)$

**Exemple**

- $P(X+Y=2) = \sum\limits_{i+j=2} P\left((X=i)\cap(Y=j)\right) = P((X=0)\cap(Y=2)) + P((X=1)\cap(Y=1)) + P((X=2)\cap(Y=0))$
- $P(X+Y=1) = \sum\limits_{i+j=1} P\left((X=i)\cap(Y=j)\right) = P((X=0)\cap(Y=1)) + P((X=1)\cap(Y=0))$

**Exemple**

On considère le jeu suivant qui se déroule en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce. Si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- La 2ème partie consiste à lancer un dé à 6 faces. Si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, si on tombe sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €. Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.

La variable aléatoire $X$ désigne les gains à la 1ère partie, la variable aléatoire $Y$ désigne les gains à la 2ème partie.

Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire somme $S = X + Y$ donnant le gain total cumulé à la fin des deux parties.

| **SOMME** $S = X + Y$ | | **X** | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 |
| **Y** | $-5$ | | |
| | 1 | | |
| | 2 | | |

Ainsi on a : $\bullet P(S = -4) = P((X = 1) \cap (Y = -5))$

$= P(X = 1)P(Y = -5)$ (en effet X et Y sont indépendantes)

$\bullet P(S = -3) = P(X = 2)P(Y = -5)$

$\bullet P(S = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$

$\bullet P(S = 3) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1)$

$\bullet P(S = 4) = P(X = 2)P(Y = 2)$

On peut présenter la loi de probabilité de $S$ dans un tableau :

| $k$ | -4 | -3 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(S = k)$ | | | | | |

# 2 Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires

## 2.1 Espérance

**Définition**

Soit $X$ une variable aléatoire prenant n valeurs $x_i$ avec la probabilité $p_i = p(X = x_i)$. L'espérance mathématique de $X$ est le nombre noté $E(X)$ :

$$E(X) =$$

**Remarque**

*C'est la moyenne des valeurs prises par la v.a. $X$, pondérées par les probabilités qu'ont ces valeurs de se produire.*
*Un jeu tel que $E(X) = 0$ est dit ............*

**Exemple**

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire $X$ correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) =$$

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | | |
| $p_i$ | | |

**Propriété**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même univers $\Omega$ et $a$ un nombre réel. Alors :

$$E(X + Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E(aX) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad E(aX + Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Démonstration :**

Ici, on démontrera que la 2ième et 3ième propriété :

Pour $a = 0$ la propriété est évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1; ...x_n$, les valeurs prises par $X$, alors $aX$ prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.

Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.

Or $aX = ax_i$ si, et seulement si, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.

Ainsi, $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X)$ ■

Propriété à démontrer : « $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX + Y) = E(aX) + E(Y)$ donc $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$. ■

**Exemple**

On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient $X_1$ la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape et $X_2$ la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la seconde étape. Dans ces conditions, on a $X = X_1 + X_2$.
- On étudie ensuite les lois de probabilité de $X_1$ et $X_2$.

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | | |
| $P(X_1 = x_i)$ | | |

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | | |
| $P(X_2 = x_i)$ | | |

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = \ldots$ et $E(X_2) = \ldots$.
- En conclusion on a $E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

## 2.2 Variance

**Définition**

En reprenant les notations précédentes, on a $V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$.

**Exemple**

Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
La variance de la variable aléatoire $X$ correspondant au gain remporté s'élève à :

| | | |
|---|---|---|
| $x_i$ | | |
| $p_i$ | | |

$V(X) =$

**Propriété**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad V(aX+b) = \dots\dots\dots\dots$$

**Démonstration :**

Propriété à démontrer : « $V(aX) = a^2 V(X)$ »

Si $a = 0$, la propriété est évidente. On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1; ...x_n$ les valeurs prises pas $X$, alors $aX$ prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.

Par définition, $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$

D'où $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} a^2 (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$

Ainsi $V(aX) = a^2 \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i) = a^2 V(X)$ ■

**Exemple**

On considère une variable aléatoire $X$ vérifiant $V(X) = 16$, alors $V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times 16 = 256$

**Définition**

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, $n$ variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, ...E_n$. On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$ :

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

**Propriété** (Admise)

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur $\Omega$, alors :

$$V(X+Y) = \dots\dots\dots$$

**Exemple**

On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exemple précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

| $x_i$ | $-6$ | $9$ |
|---|---|---|
| $P(X_1 = x_i)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

| $x_i$ | $-2$ | $6$ |
|---|---|---|
| $P(X_2 = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

- On calcule $V(X_1)$ : on avait obtenu $E(X_1) = -1$ donc $V(X_1) =$
- On calcule $V(X_2)$ : on avait obtenu $E(X_2) = 2$ donc $V(X_2) =$

Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes. On a donc $V(X) =$.