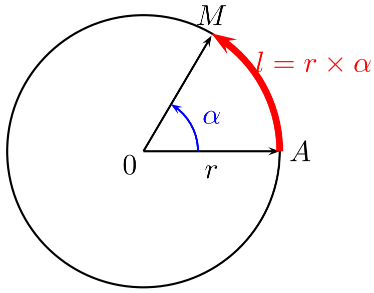
Chapitre 13 : Fonctions trigonométriques

1 Le radian



Définition

Le <u>radian</u> est, comme le degré, une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante :
Si A et M sont deux points d'un cercle de centre O de rayon r, l désigne la longueur de l'arc AM
La mesure en radians de l'angle AOM est le réel $\alpha = \dfrac{l}{r}$

Remarque

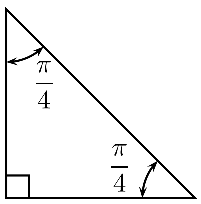
— *Le cas particulier $r = 1$ est intéressant car alors $l = \alpha$. Dans ce cas, la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est égale à la longueur de l'arc géométrique $\widehat{AM}$*

— *Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians :*
360 *degrés* = 2π *radians ou encore* 180 *degrés* = π *radians*

Exemple
On obtient le tableau de conversions suivant :

Angle	plein	plat	droit	fig.b	fig.a	fig.b
Mesure en degrés	360	180	90	60	45	30
Mesure en redians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Figure a :
triangle rectangle isocèle



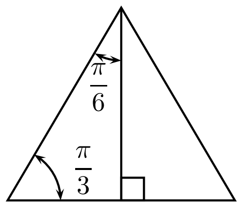


Figure b :
triangle équilatéral

2 Cercle trigonométrique

Définition

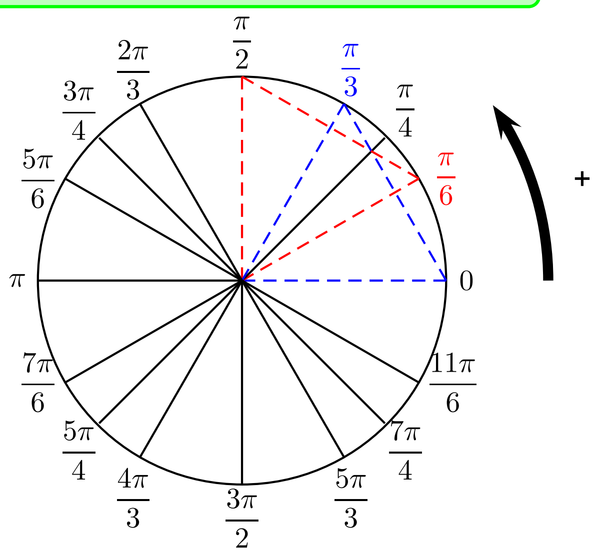
- Un <u>cercle orienté</u> est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct ou indirect
- Le <u>cercle trigonométrique</u> est le cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre

Remarque
On peut donner aux sens plusieurs dénominations :

— *Sens direct : sens positif, sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre.*

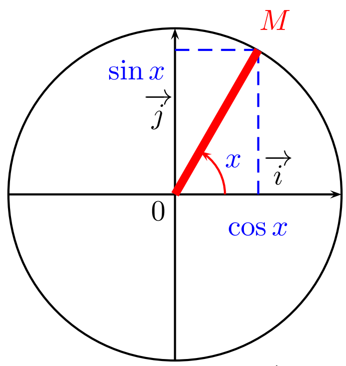
— *Sens indirect : sens négatif, sens horaire.*

Exemple
Placer les principales mesures en radian sur le cercle trigonométrique en prenant 4cm pour une unité



3 Fonctions sinus et cosinus

3.1 Défintions



Définition

Soit x un réel quelconque
Il lui correspond un unique point M de $(\mathcal{C})$ tel que x soit une mesure en radians de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$

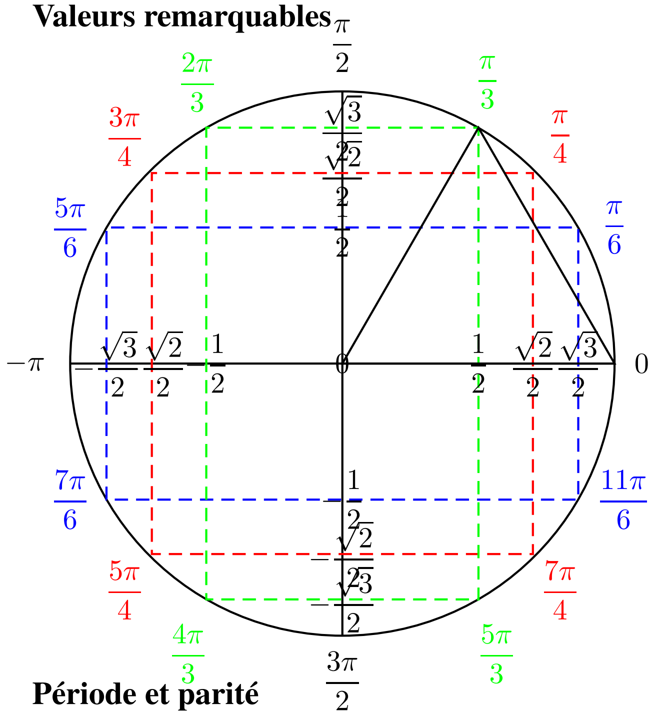
- Le <u>cosinus</u> de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$
- Le <u>sinus</u> de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

$cosx$ et $sinx$ sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$. On note : $M\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix}$

Propriété

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

3.2 Valeurs remarquables



D'après ce cercle trigonométrique, on peut déterminer quelques valeurs utiles :

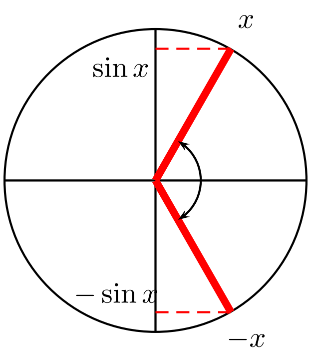
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

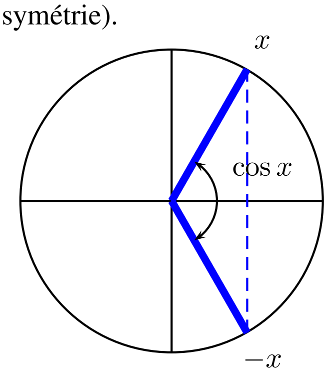
3.3 Période et parité

D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

— $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$
Ce qui signifie que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques, c'est à dire qu'elle se répetent de manière identique tous les 2π

— $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$
Ce qui signifie que la fonction cosinus est paire (elle admet une symétrie d'axe l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre se symétrie).





3.4 Variations et courbe représentative

Les fonctions sinus et cosinus étant 2π-périodiques, on les étudie sur un intervalle de période 2π
Ces fonctions étant aussi paire ou impaire, on peut encore restreindre l'intervalle à $[0; \pi]$

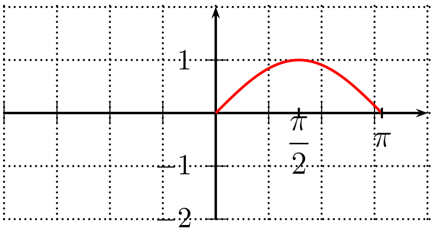
On obtient les tableaux de variations par lecture du cercle trigonométrique :

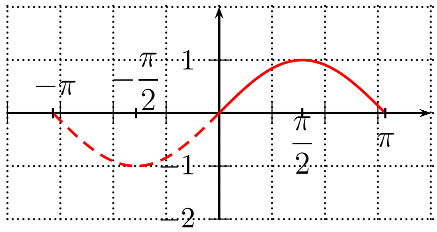
3.4.1 Fonction sinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0; \pi]$ de la fonction sinus est :

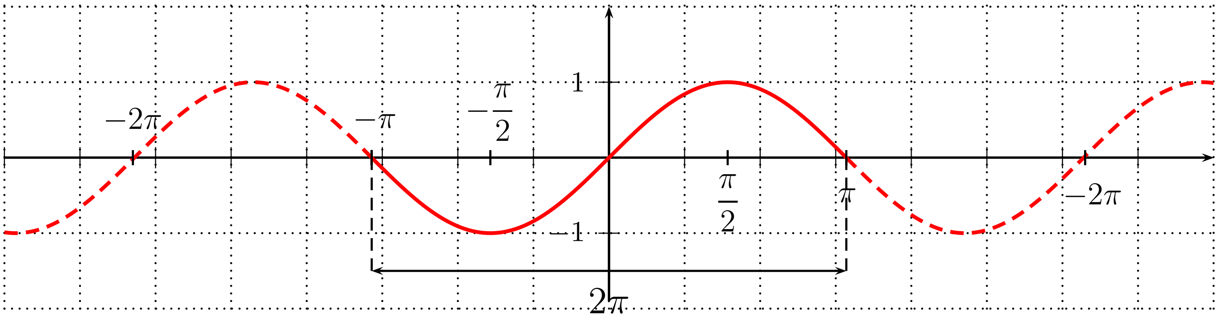
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
			1		
$\sin(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sur l'intervalle $[0; \pi]$, puis par symétrie centrale, sur $[-\pi; \pi]$





puis par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction sinus qui s'appelle une **sinusoïde**

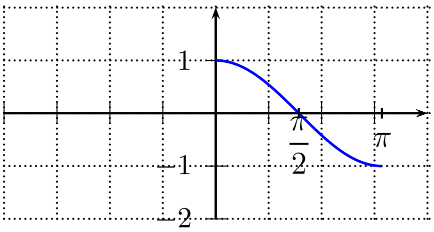


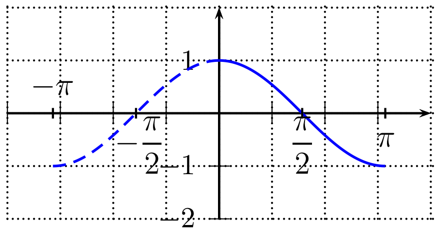
3.4.2 Fonction cosinus

Le tableau de variations sur l'intervalle $[0; \pi]$ de la fonction cosinus est :

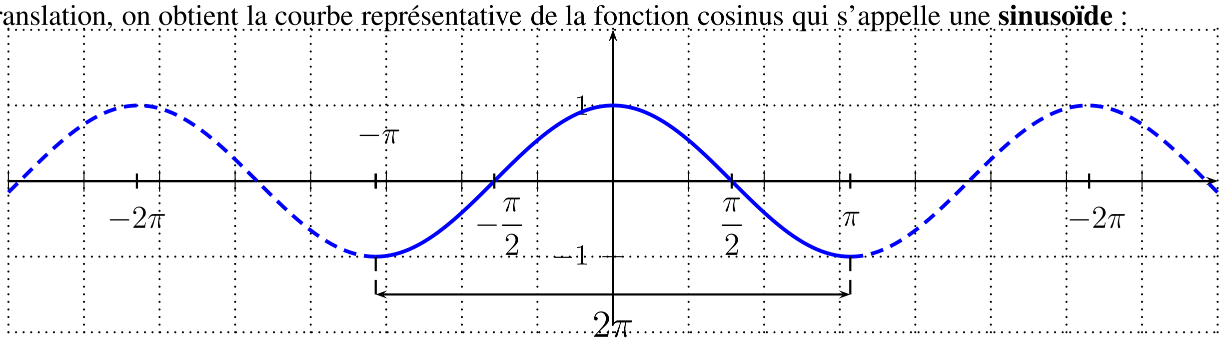
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
	1		
$\cos x$		0	
			-1

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ sur l'intervalle $[0; \pi]$, puis par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[-\pi; \pi]$





par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus qui s'appelle une **sinusoïde** :

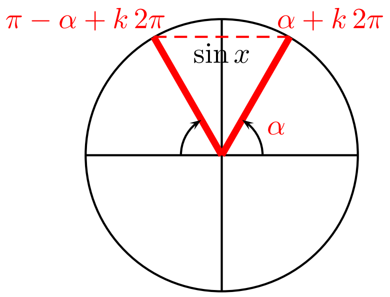


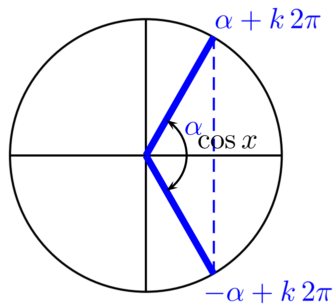
4 Equations trigonométriques

Propriété

Soit α une réel fixé, alors l'équation :

- $\sin x = \sin\alpha$ a pour solutions $x = \alpha + 2k\pi$ et $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \cos\alpha$ a pour solutions $x = \alpha + 2k\pi$ et $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$





Exemple

Résoudre les équations suivantes :

- $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\sin(x) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}$

— $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

— $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

— $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

— $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

— $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

— $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$