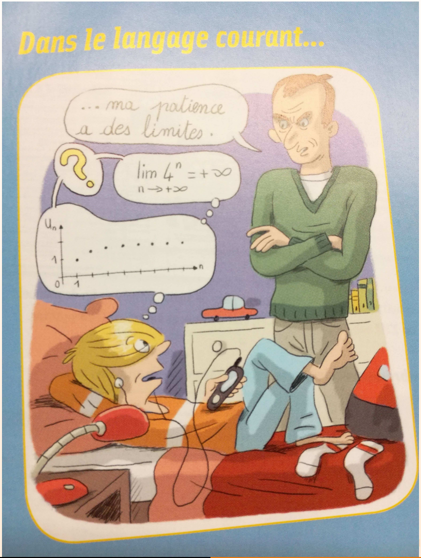
Cours de spécialité Mathématiques (Term) Limites de suite

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2022-2023


Dans le langage courant...
... ma patience a des limites.
$\lim_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$
u_n
1
0
1
n

Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient ....
....

Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\cdots\cdots\cdots$$

Définition

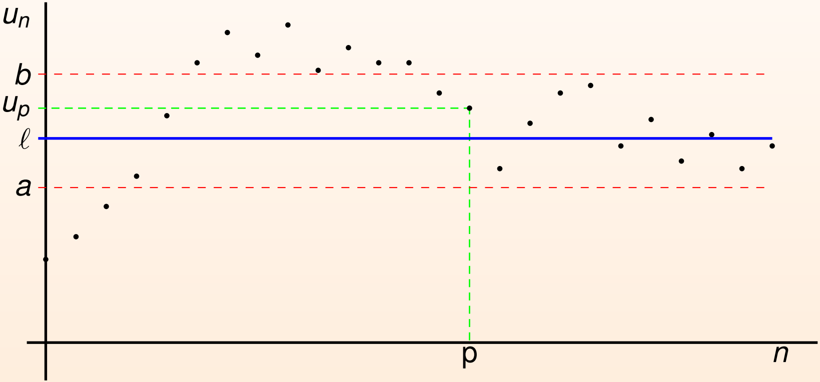
La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

.

Interprétation graphique



Définition

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) contient ....

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

. . . .

Définition

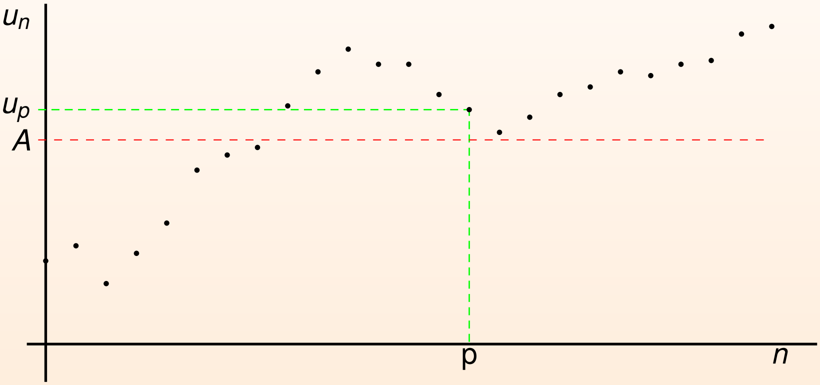
Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) contient toutes les valeurs de u_n à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad (\text{resp.} -\infty)$$

.

Interprétation graphique



Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
Définir fonction seuil(A)
n ← ...
u ← ...
Tant que u < A
    n ← ...
    u ← ...
Fin Tant que
Retourner n
```

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Définir fonction seuil(A)
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow \dots$
Tant que $u < A$
$n \leftarrow \dots$
$u \leftarrow \dots$
Fin Tant que
Retourner n

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
Définir fonction seuil(A)
n ← 0
u ← 2
Tant que u < A
    n ← ...
    u ← ...
Fin Tant que
Retourner n
```

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
Définir fonction seuil(A)
n ← 0
u ← 2
Tant que u < A
        n ← n + 1
        u ← ...
Fin Tant que
Retourner n
```

Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Elle est croissante et admet pour limite $+\infty$
Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
Définir fonction seuil(A)
n ← 0
u ← 2
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
Retourner n
```

En langage calculatrice et Python :

TI	CASIO	Python

PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
	======SEUIL
	"A="?→A↵
	0→N↵
	2→U↵
	While U<A↵
	N+1→N↵
	4×U→U↵
	WhileEnd↵
	N
		def seuil(a):
		    n=0
		    u=2
		    while u<a:
		        n=n+1
		        u=4*u
		    return(n)

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \ \ldots$$

Théorème

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \dots$$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \dots$$

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \dots$$

Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Théorème

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = \ldots$

Théorème

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$

Théorème

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = \dots$

Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Preuve de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: ......

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Preuve de $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Preuve de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

Preuve de $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$: soit A un réel quelconque.

Si $A \leq 0$ alors $n^2 > A$ pour tout $n \geq 1$; on choisit donc $N = 1$.

Si $A > 0$, pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$; alors $\forall n \geq N$ on a $n^2 > A$.

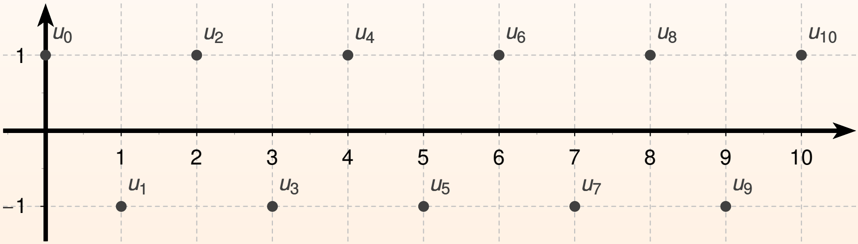
Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Remarque

Il existe des suites qui n'ont aucune limite (finie ou infinie), par exemple, la suite (u_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_n = (-1)^n$ *n'admet pas de limite car elle prend alternativement les valeurs*

Remarque

Il existe des suites qui n'ont aucune limite (finie ou infinie), par exemple, la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite car elle prend alternativement les valeurs 1 et -1


u_0
u_2
u_4
u_6
u_8
u_{10}
1
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
u_1
u_3
u_5
u_7
u_9

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$					

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$				

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$			

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. I.

F. I. = forme indéterminée ; on ne connait pas à priori la réponse.

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$			

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$		

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ avec R. S.	

Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ avec R. S.	F. I.

R. S. = règle des signes.

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$						

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$					

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0				

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.			

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)		

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)	$\pm\infty$ (R. S.)	

Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	F. I.	$\pm\infty$ (R. S.)	$\pm\infty$ (R. S.)	F. I.

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$$

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2 = 2$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$$

Donc par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3n+5} = 0$$

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note ....

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\dfrac{0}{0}$ ", " $\dfrac{\infty}{\infty}$ "

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\dfrac{0}{0}$", "$\dfrac{\infty}{\infty}$" mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", " $\dfrac{0}{0}$ ", " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (-n - 5) = -\infty,$$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (-n-5) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$$\lim_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (-n - 5) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2})$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (-n-5) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2})$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n - 5) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}) = 3$

Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n-5) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture : $u_n = n^2(3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}) = 3$

Donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$$\lim_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n+7) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée (" $\dfrac{\infty}{\infty}$ ").

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée (" $\dfrac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0)$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+7) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée (" $\dfrac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}, \quad (n \neq 0)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\dfrac{5}{n}) = 3$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n+7) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée (" $\dfrac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}$, $(n \neq 0)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3+\dfrac{5}{n}) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2+\dfrac{7}{n}) = -2$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n+7) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée (" $\dfrac{\infty}{\infty}$ ").

Changement d'écriture : $u_n = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(-2+\frac{7}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{-2+\frac{7}{n}}$, $(n \neq 0)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (3+\dfrac{5}{n}) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2+\dfrac{7}{n}) = -2$

Donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty,$$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture :

$$u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture :

$$u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$,

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture :

$$u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty,$$

On est donc en présence d'une forme indéterminée ("$\infty - \infty$").

Changement d'écriture :

$$u_n = n - \sqrt{n} = n(1 - \frac{\sqrt{n}}{n}) = n(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$$

Donc par produit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Énigme ★

L'épaisseur d'une feuille de papier est de 0,01 cm. Julien affirme : « Si l'on pouvait la plier en deux indéfiniment, l'épaisseur de la feuille pliée dépasserait la distance de la Terre à la Lune. »

➤ ***Qu'en pensez-vous ?***

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors ....

Théorème

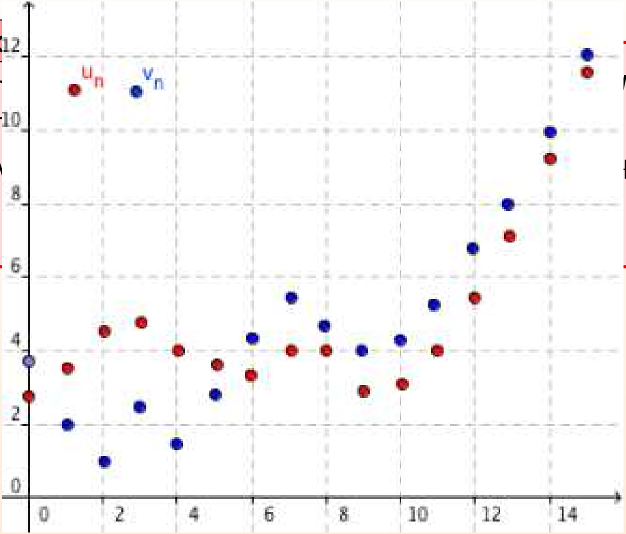
Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théo

Soien … tels que
pour …

M … $+\infty$



Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors ....

Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration du théorème de minoration (**exigible**) :

Démonstration du théorème de minoration (**exigible**) :

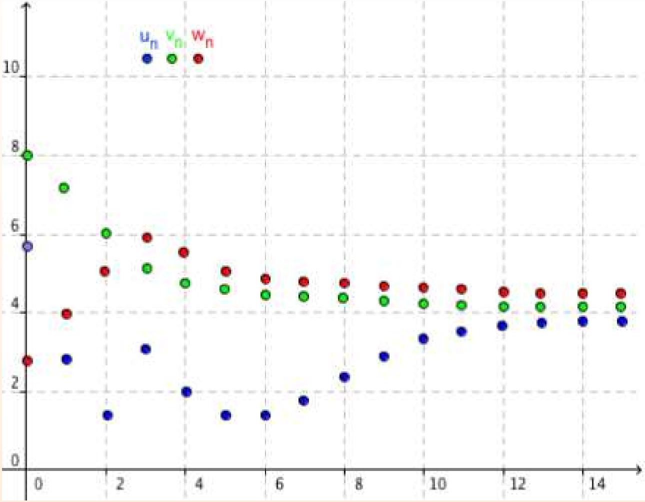
Voir diapo "Démonstration du théorème de minoration"
La démonstration est analogue pour le théorème de majoration.

Théorème (Théorème "des gendarmes")

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) ....

Théorème (Théorème "des gendarmes")

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ.
On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) converge également vers ℓ


u_n v_n w_n
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
12
14

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n} \qquad -1 \leq \sin(n) \leq 1$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n}$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} =$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{n} =$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2\sin(n)}{n}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$u_n = \dfrac{2\sin(n)}{n}$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$
$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$
$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = 0$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple

Déterminer la limite de la suite (u_n) *définie pour* $n \in \mathbb{N}$ *par*
$u_n = \dfrac{2\sin(n)}{n}$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$
$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$
$$\frac{-2}{n} \leq \frac{2\sin(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \text{ car } n > 0$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ par le théorème des gendarmes.}}$$