Chapitre 1 : Limites de suites

1 Limite finie ou infinie d'une suite

1.1 Limite finie d'une suite

Définition

La suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si tout

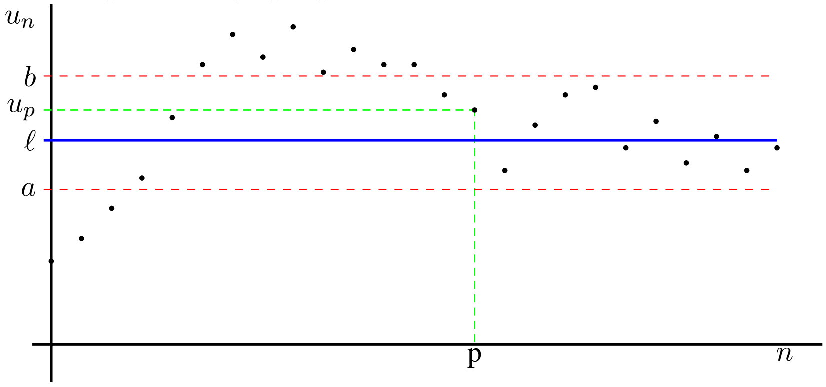
intervalle ouvert contenant ℓ contient ....

....

On écrit alors :

....

Interprétation graphique :



1.2 Limite infinie d'une suite

Définition

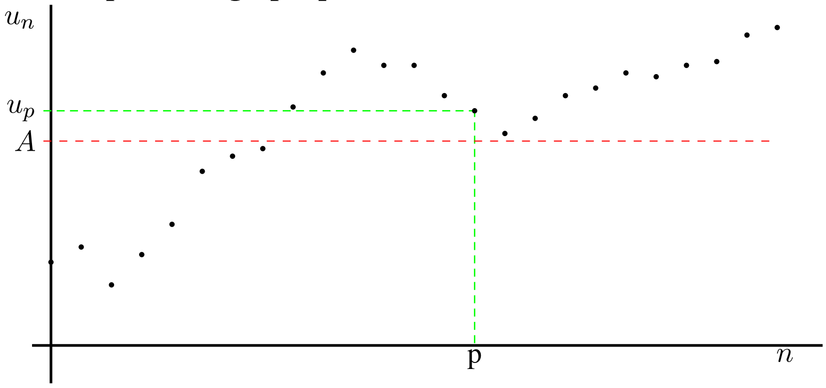
Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) contient

....

On écrit alors :

....

Interprétation graphique :



Algorithme déterminant un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Définir fonction seuil(A)
$n \leftarrow \ldots$
$u \leftarrow \ldots$
Tant que $u < A$
    $n \leftarrow \ldots$
    $u \leftarrow \ldots$
Fin Tant que
Retourner n

En langage calculatrice et Python :

TI	CASIO	Python
PROGRAM:SEUIL	======SEUIL	def seuil(a):
:Input A	"A="?→A↵	n=0
:0→N	0→N↵	u=2
:2→U	2→U↵	while u<a:
:While U<A	While U<A↵	n=n+1
:N+1→N	N+1→N↵	u=4*u
:4*U→U	4×U→U↵	return(n)
:End	WhileEnd↵	
:Disp N	N	

1.3 Limites des suites usuelles

Théorème

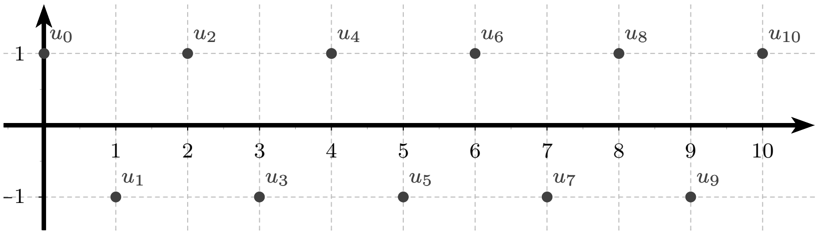
$\lim\limits_{n\to+\infty} n = \ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \ldots$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \ldots$

Pour tout entier $k \geq 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = \ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = \ldots$

Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$:

Remarque
Il existe des suites qui n'ont aucune limite (finie ou infinie), par exemple, la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite car elle prend alternativement les valeurs …… et …….



2 Opérations sur les limites

2.1 Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

2.2 Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$			

2.3 Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$						

2.4 Exemple

Étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2}{3n+5}$

2.5 Formes indéterminées

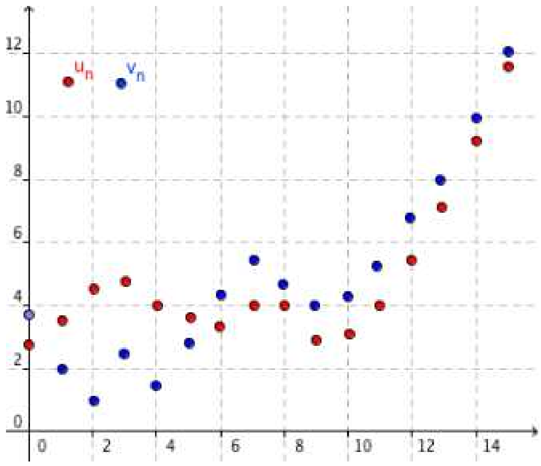
Les cas des formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note ……..……..……..……..…..
mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

Le principe est toujours le même pour "lever" une indétermination : il faut changer l'écriture de la suite.
Exemple 1 : $u_n = 3n^2 - n - 5$

Exemple 2 : $u_n = \dfrac{3n+5}{-2n+7}$

Exemple 3 : $u_n = n - \sqrt{n}$

3 Limites et comparaison



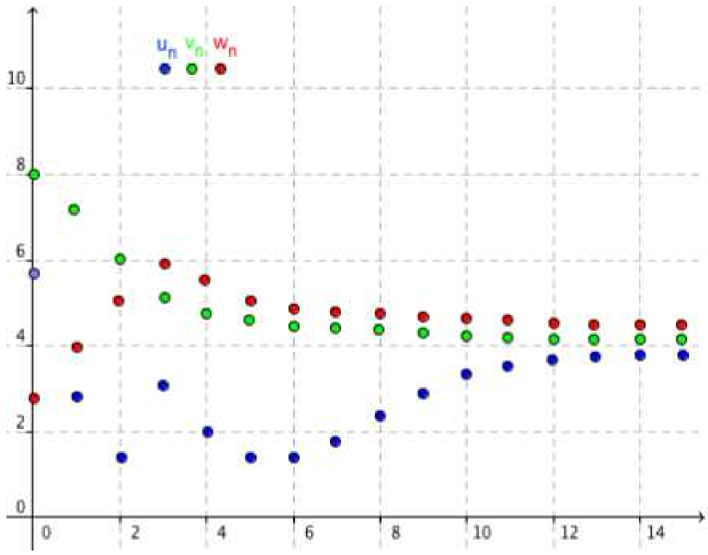
Théorème

Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.

— Minoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors ……..……

— Majoration : si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors ……..……

Démonstration du théorème de minoration : (exigible)



Théorème (Théorème "des gendarmes")

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n). Soit un entier N et un réel ℓ. On suppose que pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) …….

Exemple 

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2\sin(n)}{n}$