Chap 5 : Récurrence et convergence de suite

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2022-2023

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: ....

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $\quad 1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: $\quad$ . . . .

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n.

Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n :
$1 + 2 + \ldots + n$ est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

- Pour $n = 2$: $\quad 1 + 2 = 3$ et $\dfrac{2(2+1)}{2} = 3$
- Pour $n = 3$: $\quad 1 + 2 + 3 = 6$ et $\dfrac{3(3+1)}{2} = 6$

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

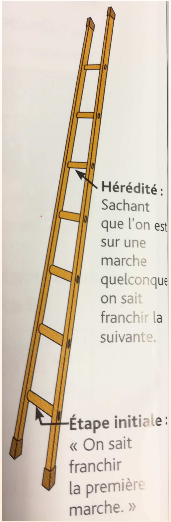
Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

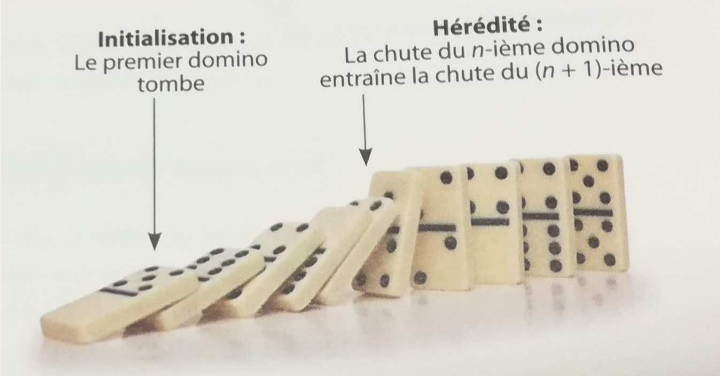
Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.
Idée : le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré).

Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.




Initialisation :
Le premier domino tombe
Hérédité :
La chute du n-ième domino entraîne la chute du (n + 1)-ième

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P est vraie, au rang n_0.
  C'est le premier barreau de l'échelle.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P est vraie, au rang n_0.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que la propriété P est vraie au rang k.
  On démontre que la propriété P est vraie au rang $k+1$.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété P est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que P est vraie, au rang n_0.
  C'est le premier barreau de l'échelle.
- Hérédité : On suppose que la propriété P est vraie au rang k.
  On démontre que la propriété P est vraie au rang $k + 1$.
  C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.
- Conclusion : la propriété P est vraie pour tout entier n ou pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Montrons la propriété P : "$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$" pour $n\in\mathbb{N}^*$

Exemple

Montrons la propriété P : "$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$" pour $n \in \mathbb{N}^*$

- Initialisation : ....
  ....
  ....

Exemple

Montrons la propriété P : "$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$" pour $n \in \mathbb{N}^*$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 1 :
  $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$; c'est vérifié.

- Hérédité :

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons que P est vraie au rang k :

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - <u>Hypothèse de récurrence :</u>

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$

  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) =$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

    $=$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

  c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

  On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

  $= (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) =$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - <u>Hypothèse de récurrence :</u>

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - <u>Démontrons que :</u> la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

    $= (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

    $= (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc la propriété P est vraie au rang $k+1$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

    $= (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc la propriété P est vraie au rang $k+1$

- Conclusion : La propriété P est vraie pour tout $n \geq 1$,

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

    $= (k+1)\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Donc la propriété P est vraie au rang $k+1$

- Conclusion : La propriété P est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire : $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Il est indispensable de savoir bien rédiger une récurrence !

- Il est indispensable de savoir bien rédiger une récurrence !
- Souvent il faudra faire deux calculs séparément dans l'initialisation

- Il est indispensable de savoir bien rédiger une récurrence !
- Souvent il faudra faire deux calculs séparément dans l'initialisation
- L'hypothèse de récurrence (HDR) doit être clairement écrite dans l'hérédité, tout comme l'objectif à atteindre

- Il est indispensable de savoir bien rédiger une récurrence !
- Souvent il faudra faire deux calculs séparément dans l'initialisation
- L'hypothèse de récurrence (HDR) doit être clairement écrite dans l'hérédité, tout comme l'objectif à atteindre
- On mentionne explicitement l'endroit où l'HDR est utilisée.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

  $u_0 = 2$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

  $u_0 = 2$ $\qquad$ $2 + 3 \times n$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

  $u_0 = 2$ $\qquad\qquad$ $2 + 3 \times 0$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

  $u_0 = 2$ $\qquad$ $2 + 3 \times 0 = 2$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3n$

Démontrons par récurrence la propriété P : $u_n = 2 + 3n$

- Initialisation : Montrons que P est vraie au rang 0 :

  $u_0 = 2$ $\qquad$ $2 + 3 \times 0 = 2$

  C'est vérifié.

- Hérédité :

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k :

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k+1)$.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:
    c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

    On a
    $$u_{k+1} = u_k + 3$$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k+1)$.

  On a
$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 3 \\ &= 2 + 3k + 3 \end{aligned}$$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:
  c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

  On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \color{red}{u_k} + 3 \\ &= \color{red}{2 + 3k} + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k+1)$.

  On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 3 \\ &= 2 + 3k + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 3(k+1) \end{aligned}$$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:
    c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

  On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= {\color{red}u_k} + 3 \\ &= {\color{red}2 + 3k} + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 3(k + 1) \end{aligned}$$

  Donc la propriété P est vraie au rang $k + 1$

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:
    c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k + 1)$.

  On a

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 3 \\ &= 2 + 3k + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 3(k+1) \end{aligned}$$

  Donc la propriété P est vraie au rang $k + 1$

- Conclusion : La propriété P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $u_k = 2 + 3k$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $u_{k+1} = 2 + 3(k+1)$.

  On a
  $$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 3 \\ &= 2 + 3k + 3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 3(k+1) \end{aligned}$$

  Donc la propriété P est vraie au rang $k+1$

- Conclusion : La propriété P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  C'est-à-dire : $u_n = 2 + 3n$.

Comportement d'une suite numérique

Par "étudier le comportement de la suite (u_n)", on sous-entend étudier les propriétés du nombre u_n lorsque l'entier n devient de plus en plus grand (variations, encadrement, comportement à l'infini . . .).

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si ……………………….

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

minorée par m si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

minorée par m si ....

bornée si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

bornée si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

bornée si ....

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

majorée par M si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

minorée par m si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

bornée si pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemples

Exemples

Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

....

....

....

Exemples

Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$;

....

....

....

Exemples

Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$;

....

....

....

Exemples

Soit la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$;

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif : un minorant n'est donc pas unique.

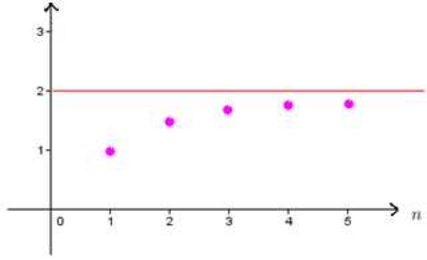
Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{0; 1; 4; \ldots\}$;

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$.

Cette suite est aussi minorée par 0 et par tout réel négatif ; en plus ici, 0 est le minimum de la suite atteint au rang 0.

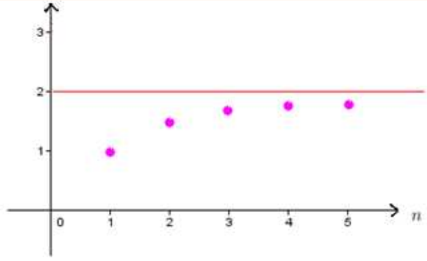
Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est . . . .



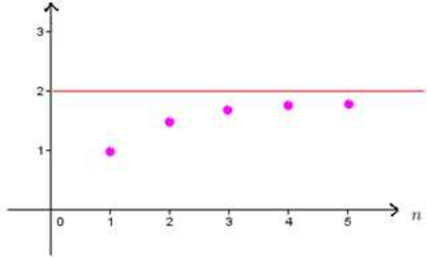
Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ.



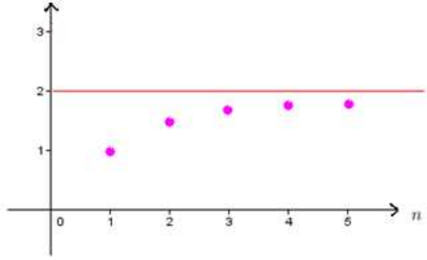
Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ. c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, ...



Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est majorée par ℓ. c'est-à -dire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \ell$.



Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle ....

Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle ....

Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.
Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle converge.

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant, de la suite.

Corollaire

Une suite croissante non majorée . . . .

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :

Soit (u_n) une suite croissante non majorée

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

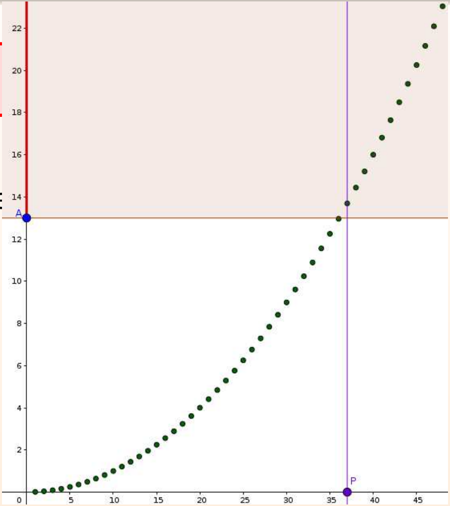
Démonstration exigible :

Soit (u_n) une suite croissante non majorée

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non



Démonstration exigible :

Soit (u_n) une suite croissante

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée

Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée

d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.

d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.

d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Corollaire

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration exigible :
Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe au moins un entier p tel que $u_p > A$.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p$
d'où $\forall n \geq p$, $u_n > A$.
Donc à partir du rang p, tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition

Une suite (u_n) est une suite .... s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Définition

Une suite (u_n) est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Définition

Une suite (u_n) est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition

Une suite (u_n) est une suite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$				

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite			

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0		

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration exigible pour $q > 1$:

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration exigible pour $q > 1$:

Pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ (avec $q > 1$), nous allons d'abord démontrer l'inégalité de Bernoulli :

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration exigible pour $q > 1$:

Pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ (avec $q > 1$), nous allons d'abord démontrer l'inégalité de Bernoulli : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

- Initialisation : Montrons que P est vraie pour $n = 0$:

$$(1+a)^0 =$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

- Initialisation : Montrons que P est vraie pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1+a)^0 &= 1 \\ &\geq\end{aligned}$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

- Initialisation : Montrons que P est vraie pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1+a)^0 &= 1 \\ &\geq 1 + 0 \times a\end{aligned}$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

- Initialisation : Montrons que P est vraie pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}(1+a)^0 &= 1 \\ &\geq 1 + 0 \times a\end{aligned}$$

Ainsi P est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité :

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k :

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - <u>Hypothèse de récurrence :</u>
  Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1 + a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k + 1$:

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} =$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$

  - Hypothèse de récurrence :

    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.

  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:

    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a > 0)$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

$(1+a)^k \geq 1 + ka$ Donc : $(1+a)^k \times (1+a) \geq (1+ka) \times (1+a)$

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a>0)$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a > 0)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a > 0)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a)$ (par H.R. et car $1+a > 0$)

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
    Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
    c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a > 0)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a$$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1 + ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a > 0)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (1+k)a + ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (1+k)a$$

- Conclusion : Par récurrence, P est vraie pour tout $n \geq 0$,

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons que P est vraie au rang k : $(1+a)^k \geq 1+ka$.
  - Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
  c'est à dire que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \times (1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka) \times (1+a) \text{ (par H.R. et car } 1+a>0)$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a+ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(1+k)a$$

- Conclusion : Par récurrence, P est vraie pour tout $n \geq 0$,
  c'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ avec $a > 0$.

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Nous avons montré la propriété P pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } a > 0,\ (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Nous avons montré la propriété P pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } a > 0, (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Soit $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Nous avons montré la propriété P pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } a > 0,\ (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Soit $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P.

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Nous avons montré la propriété P pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } a > 0,\ (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Soit $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Démontrons maintenant que si $q > 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Nous avons montré la propriété P pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{si } a > 0,\ (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Soit $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

Alors $q^n \geq 1 + na$, d'après la propriété P.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$, car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de minoration : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$,

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$, car $-1<\frac{1}{2}<1$.

Exemple

Calculer $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$, car $-1<\frac{1}{2}<1$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$

Exemple

Calculer $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

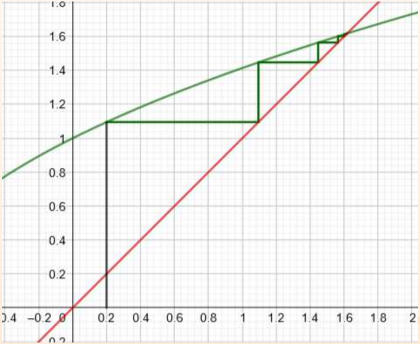
Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$, car $-1<\frac{1}{2}<1$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$

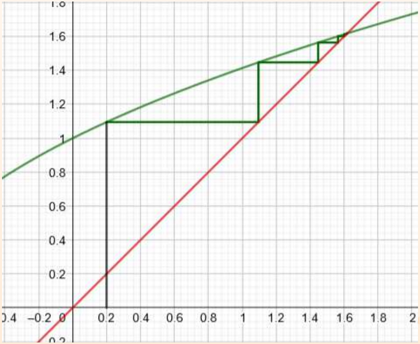
Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I



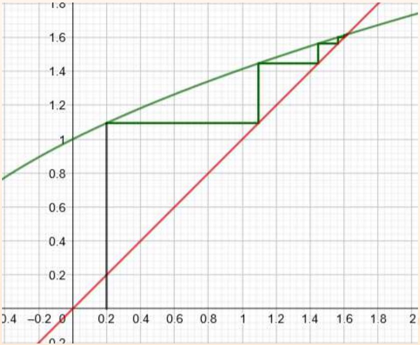
Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.



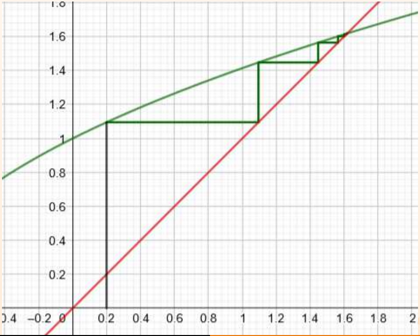
Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I



Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.



Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n)*.*

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) =$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée . . . . , on peut donc noter L sa limite.

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$,

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe,

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n)*.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x$$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$

En supposant que (u_n) converge. Déterminer la limite de (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ 0.85x + 1.8 &= x \end{aligned}$$

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n)*.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ 0.85x + 1.8 &= x \\ -0.15x &= -1.8 \end{aligned}$$

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n)*.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ 0.85x + 1.8 &= x \\ -0.15x &= -1.8 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Exemple

Soit (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que (u_n) *converge. Déterminer la limite de* (u_n)*.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0.85x + 1.8$.
Or (u_n) est supposée convergente, on peut donc noter L sa limite.
Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ 0.85x + 1.8 &= x \\ -0.15x &= -1.8 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} u_n = 12}$$