Chapitre 5 : Récurrence, Convergence de suites

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Introduction

En Mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple, la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc :

pour $n = 2$: .... pour $n = 3$: ....

Même si on le vérifie jusqu'à $n = 100$, cela ne démontre pas que ce résultat est vrai pour tout n.

Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : le raisonnement par récurrence.

Idée : Le raisonnement par récurrence "est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (Poincaré). Le principe est le suivant : si on peut se placer d'abord sur un barreau d'une échelle, et si on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle.

1.2 Principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, (n_0 un entier naturel quelconque, en général 0 ou 1), on procède en trois étapes :

- Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0. *C'est le premier barreau de l'échelle.*
- Hérédité : On suppose que pour un entier k quelconque, la proposition P est vraie au rang k. Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P est vraie au rang $k + 1$. *C'est le passage d'un barreau quelconque au suivant.*
- Conclusion : La propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

1.3 Exemple

Montrons la propriété P : "$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$" pour $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation : ....

Hérédité : ....

2 Convergence monotone

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition

Soient M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- majorée par M si ....
- minorée par m si ....
- bornée si ....

Exemples

- Soit la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \{1/1; 1/2; 1/3; \ldots\}$
- Soit la suite $(n^2)_{n\geq 0} = \{\ldots \qquad \}$.

2.2 Cas des suites monotones et convergentes

Théorème

Soit une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ. Si la suite (u_n) est croissante, alors elle est ...., c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, ...

2.3 Convergence de certaines suites

Théorème

Si (u_n) est une suite croissante et majorée, alors elle ....

Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors elle ....

Attention : Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant, ou un minorant de la suite.

Corollaire

Une suite croissante non majorée ....

Démonstration exigible

3 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

3.1 Rappel

Définition

Une suite (u_n) est une suite .... s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé la raison de la suite.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n =$

3.2 Limites

Propriété

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$				

Démonstration exigible pour $q > 1$:

Pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ (avec $q > 1$), montrons d'abord l'inégalité de Bernoulli : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

Montrons par récurrence (pour $n \in \mathbb{N}$) la propriété P :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ avec } a > 0$$

- Initialisation : Montrons que P est vraie pour $n = 0$

- Hérédité : Soit $a > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$

- Hypothèse de récurrence :
Supposons que P est vraie au rang k :

Démontrons que : la propriété P est vraie au rang $k+1$:
c'est à dire que :

- Conclusion : Par récurrence, P est vraie pour tout $n \geq 0$,
c'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \ldots$. Et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \ldots$

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ldots$

4 Suite et fonction continue

Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$
En supposant que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite de la suite (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Or (u_n) est supposée $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, on peut donc noter L sa limite.

Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $\ldots\ldots\ldots\ldots$