Chapitre 11 : Produit scalaire dans l'espace

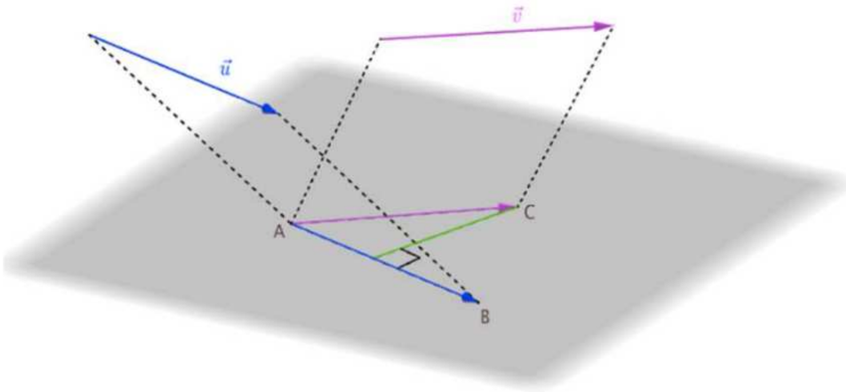
1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définitions

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan P contenant les points A. B et C.

Définition :

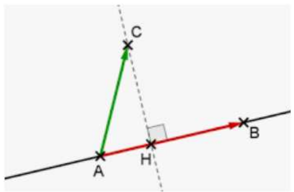
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté ....
....



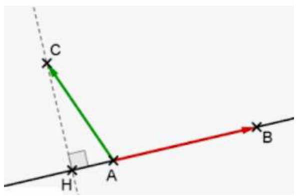
On a ainsi, (rappels de première) :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=$ ....
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors ....

Définition avec l'angle :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=$ ....



Définition avec le projeté orthogonal :
Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC), alors :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ....
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ....
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ....



1.2 Propriétés

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel. Alors :

$\vec{u}\cdot\vec{u}=$ ....

$\vec{u}\cdot\vec{v}=$ ....

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=$ ....

$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=$ ....

$(\vec{u}+\vec{v})^2=$ ....

$(\vec{u}-\vec{v})^2=$ ....

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=$ ....

1.3 Orthogonalité

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....
- Si $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}= \text{...}$$

Remarque
Le vecteur nul est ....

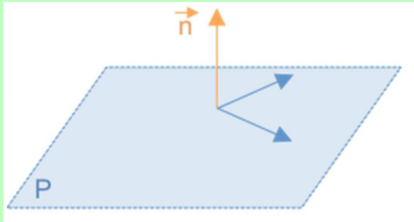
2 Equations cartésiennes de l'espace

2.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est

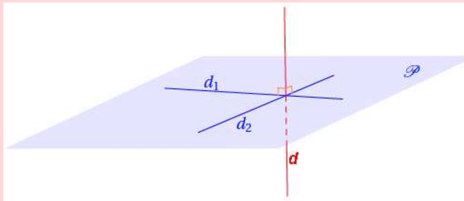
. . . .



Théorème

Une droite d est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si . . . .

. . . .



Preuve (exigible)

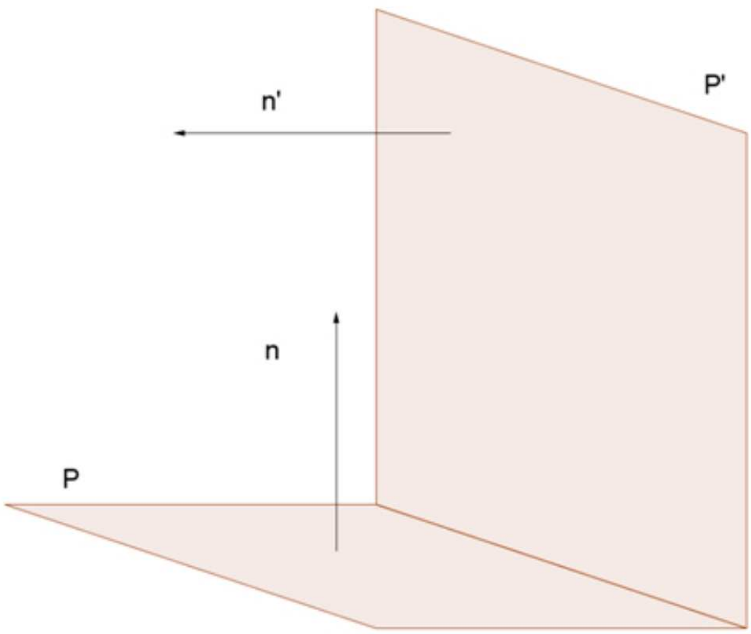
$\Rightarrow$: si d est orthogonale à toute droite du plan P, ...
. . . .

$\Leftarrow$: réciproquement on note $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs des droites d, d_1 et d_2.
Comme d est orthogonale à d_1 et d_2, alors . . . .
Soit Δ une droite du plan P, de vecteur directeur $\vec{w}$.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes, ...
. . . .
On a alors : $\vec{u} \cdot \vec{w} =$ . . . .

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ . . . .

Propriété

P et P' sont deux plans, de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.
Dire que les plans P et P' sont perpendiculaires signifie que . . . .



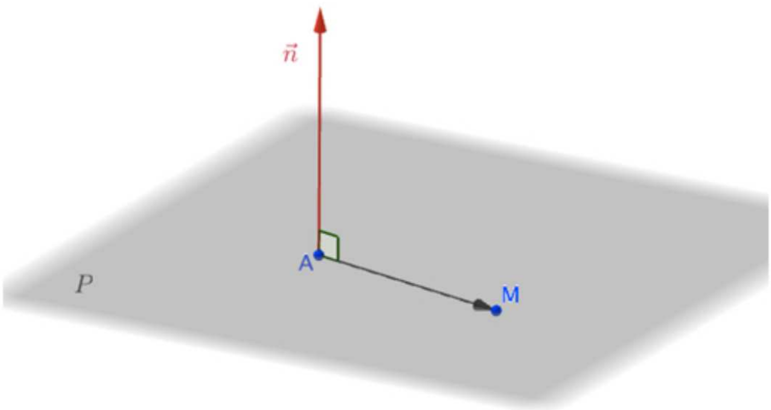
2.2 Equations cartésiennes d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.
Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ non nul admet une équation cartésienne de la forme
. . . .

Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que
. . . .

Preuve (exigible)
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de P.
$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow$ . . . . $\Leftrightarrow$. . . . .
$\Leftrightarrow$ . . . .
$\Leftrightarrow$ . . . .
$\Leftrightarrow$ . . . .



Réciproquement :
Supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c non tous nuls).
On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Alors le point . . . .
. . . .

Soit un vecteur $\vec{n}\ (a; b; c)$. Pour tout point $M(x; y; z)$, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} =$ . . . .
E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que . . . .
Donc l'ensemble E est . . . .

Remarque
L'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.
Par exemple, le plan d'équation $x + y + 3z + 2 = 0$ a aussi pour équation . . . .

2.3 Equations cartésiennes d'une droite

Propriété

Si les triplets $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$ ne sont pas proportionnels, le système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$$

caractérise . . . .

Preuve
Si les vecteurs $\vec{n}\ (a; b; c)$ et $\vec{n'}\ (a'; b'; c')$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont . . . .

3 Projection orthogonale

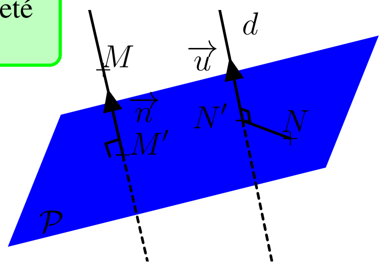
3.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition

On considère un plan $\mathcal{P}$ de l'espace dont on connait un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et un point M extérieur au plan $\mathcal{P}$. Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ passant par M.

Définition

On considère une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et un point M extérieur à cette droite ; le projeté orthogonal de M sur d est l'intersection du plan normal à $\overrightarrow{u}$ passant par M avec la droite d



Exemple

Le point M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$ (en bleu).

Le point N' est le projeté orthogonal du point N sur la droite d.

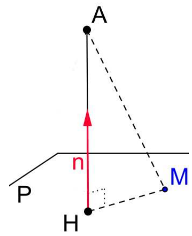
3.2 Distance d'un point à un plan

Définition

Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la plus petite des longueurs AM où $M \in \mathcal{P}$.

Propriété

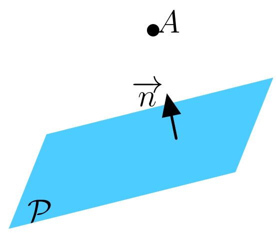
Si on note H le projeté orthogonale de A sur le plan $\mathcal{P}$, alors $d(A, \mathcal{P}) = AH$.



Preuve exigible : Propriété à démontrer : « $d(A, \mathcal{P}) = AH$ »

Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$. Pour tout $M \neq H$, le triangle AHM est rectangle en H, donc $AM > AH$. Ainsi, AH est bien la plus petite des longueurs de $d(A, \mathcal{P}) = AH$. ■

Exemple

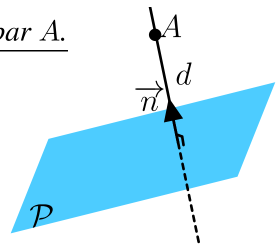


Déterminer la distance entre le point $A(-1; 3; 2)$ et le plan $\mathcal{P} : x - 3y + 2z - 4 = 0$:

1) On détermine les coordonnées d'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$

Le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

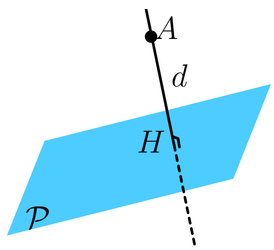
2) On détermine une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par A.



Comme $\overrightarrow{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{n}$ est un vecteur .... de la droite d.

Donc : $\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ est un représentation paramétrique de la droite d.

3) On détermine les coordonnées du point H intersection entre la droite d et le plan $\mathcal{P}$.
(Le point H est également le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$)



Le point $H(x; y; z)$ étant à la fois sur la droite d et le plan $\mathcal{P}$. Ses coordonnées vérifient donc :

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donc H a pour coordonnées :

4) La distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$ est AH