Chap 9 : Équation différentielle et primitive

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2022-2023

Définition

Une .... est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = \dots\dots$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l’inconnue est une fonction.

Exemple

- L’équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l’équation est $y = 5x$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(\ldots\ldots)' = 5$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l’inconnue est une fonction.

Exemple

- L’équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l’équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = \ldots\ldots$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l’inconnue est une fonction.

Exemple

- L’équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l’équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l’équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
  $y = \dots\dots$ est une autre solution de l'équation différentielle.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
  $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
  $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle. En effet, $(\ldots\ldots)' = 2x$.

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = 5x$. En effet $(5x)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
  $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle. En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ldots\ldots\ldots$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

$$g'(x) =$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x}$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 2x + \frac{1}{x} \\ &= 6x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :

• si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

• si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \neq 1$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a\,,\, a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\,,\, n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \neq 1$	$]-\infty; 0[$ ou $]0 : +\infty[$	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0 : +\infty[$	

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a\,,\ a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0:+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \neq 1$	$]-\infty;0[$ ou $]0:+\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0:+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	

$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$

Fonctions composées :

Fonction f	**Primitive F**	**Exemples**
$f = (u + v)$	$F =$	

Fonction f	Primitive F	Exemples
$f = (u + v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) =$

Fonction f	**Primitive** F	**Exemples**
$f = (u + v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$
$f = k \times u$	$F =$	

Fonction f	Primitive F	Exemples
$f = (u + v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$
$f = k \times u$	$F = k \times U$	$\int \left(\frac{5}{x}\right) =$

Fonction f	**Primitive** F	**Exemples**
$f = (u + v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$
$f = k \times u$	$F = k \times U$	$\int \left(\frac{5}{x}\right) = 5\ ln\ x$
$f = \left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$	$F =$	

Fonction f	**Primitive** F	**Exemples**
$f = (u + v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$
$f = k \times u$	$F = k \times U$	$\int \left(\frac{5}{x}\right) = 5\ ln\ x$
$f = \left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$	$F = 2\sqrt{u}$	$\int \left(\frac{5}{\sqrt{5x-2}}\right) =$

Fonction f	**Primitive F**	**Exemples**
$f=(u+v)$	$F=U+V$	$\int\left(x^2+e^x\right)=\frac{1}{3}x^3+e^x$
$f=k\times u$	$F=k\times U$	$\int\left(\frac{5}{x}\right)=5\ ln\ x$
$f=\left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$	$F=2\sqrt{u}$	$\int\left(\frac{5}{\sqrt{5x-2}}\right)=2\sqrt{5x-2}$
$f=\left(u'e^u\right)$	$F=$	

Fonction f	**Primitive F**	**Exemples**
$f=(u+v)$	$F=U+V$	$\int\left(x^2+e^x\right)=\frac{1}{3}x^3+e^x$
$f=k\times u$	$F=k\times U$	$\int\left(\frac{5}{x}\right)=5\ ln\ x$
$f=\left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$	$F=2\sqrt{u}$	$\int\left(\frac{5}{\sqrt{5x-2}}\right)=2\sqrt{5x-2}$
$f=\left(u'e^u\right)$	$F=e^u$	$\int\left(-2xe^{-x^2}\right)=$

Fonction f	**Primitive** F	**Exemples**
$f = (u+v)$	$F = U + V$	$\int \left(x^2 + e^x\right) = \frac{1}{3}x^3 + e^x$
$f = k \times u$	$F = k \times U$	$\int \left(\frac{5}{x}\right) = 5\ ln\ x$
$f = \left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$	$F = 2\sqrt{u}$	$\int \left(\frac{5}{\sqrt{5x-2}}\right) = 2\sqrt{5x-2}$
$f = \left(u' e^u\right)$	$F = e^u$	$\int \left(-2xe^{-x^2}\right) = e^{-x^2}$

$f = \left(\frac{u'}{u}\right)$	$F = \ln u$	$\int \left(\frac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) =$

$f = \left(\dfrac{u'}{u}\right)$	$F = \ln u$	$\displaystyle\int \left(\dfrac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) = \ln\left(0,5x^4 - e^x\right)$
$f = \left(u'u^n\right)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\displaystyle\int \left(2x(x^2-3)^3\right) =$

$f = \left(\dfrac{u'}{u}\right)$	$F = \ln u$	$\displaystyle\int \left(\frac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) = \ln\left(0,5x^4 - e^x\right)$
$f = \left(u'u^n\right)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\displaystyle\int \left(2x(x^2-3)^3\right) = \frac{1}{4}(x^2-3)^4$
$f = \left(\dfrac{u'}{u^n}\right)$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\displaystyle\int \left(\frac{3x^2}{(x^3-7)^4}\right) =$

$f=\left(\frac{u'}{u}\right)$	$F=\ln u$	$\int\left(\frac{2x^3-e^x}{0,5x^4-e^x}\right)=\ln\left(0,5x^4-e^x\right)$
$f=\left(u'u^n\right)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\int\left(2x(x^2-3)^3\right)=\frac{1}{4}(x^2-3)^4$
$f=\left(\frac{u'}{u^n}\right)$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\int\left(\frac{3x^2}{(x^3-7)^4}\right)=\frac{-1}{(3)(x^3-7)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\int(\cos(3x-1))=$

$f=\left(\dfrac{u'}{u}\right)$	$F=\ln u$	$\displaystyle\int\left(\frac{2x^3-e^x}{0,5x^4-e^x}\right)=\ln\left(0,5x^4-e^x\right)$
$f=\left(u'u^n\right)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\displaystyle\int\left(2x(x^2-3)^3\right)=\frac{1}{4}(x^2-3)^4$
$f=\left(\dfrac{u'}{u^n}\right)$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\displaystyle\int\left(\frac{3x^2}{(x^3-7)^4}\right)=\frac{-1}{(3)(x^3-7)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\displaystyle\int(\cos(3x-1))=\frac{1}{3}\sin(3x-1)$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\displaystyle\int(\sin(3-7x))=$

$f = \left(\frac{u'}{u}\right)$	$F = \ln u$	$\int \left(\frac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) = \ln\left(0,5x^4 - e^x\right)$
$f = (u'u^n)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$\int \left(2x(x^2-3)^3\right) = \frac{1}{4}(x^2-3)^4$
$f = \left(\frac{u'}{u^n}\right)$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$\int \left(\frac{3x^2}{(x^3-7)^4}\right) = \frac{-1}{(3)(x^3-7)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\int (\cos(3x-1)) = \frac{1}{3}\sin(3x-1)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\int (\sin(3-7x)) = \frac{1}{7}\cos(3-7x)$