

Chapitre 9 : Équation différentielle et Primitive

1 Equation différentielle

1.1 Définition d'une équation différentielle

Définition

Une est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x .
Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = \dots\dots$. En effet $(\dots\dots)' = 5$.
- Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = \dots\dots$
 $y = \dots\dots$ est une autre solution de l'équation différentielle. En effet, $(\dots\dots)' = 2x$.

1.2 Équation différentielle du type $y' = f$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I , on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dots\dots$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$ car :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 2x + \frac{1}{x} \\ &= 6x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2 Primitive d'une fonction

Exemple

On considère les fonctions suivantes : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto 2x + 3$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$. On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$
 F est donc solution de l'équation différentielle : $y' = f$. On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur \mathbb{R}

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si



" F est une primitive de f sur I " a le même sens que

Exemple

- $f(x) = 2$ a pour primitive $F(x) = \dots\dots$ sur \mathbb{R} .
- $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour primitive $G(x) = \dots\dots$ sur \mathbb{R} .
- Une primitive de $f(x) = 2x$ est $F(x) = \dots\dots$
- Les primitives de $f(x) = 2x$ sont $F(x) = \dots\dots$

Détermination des primitives d'une fonction

- On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :
- si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
 - si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I .

Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$I =]-\infty; 0[$ ou $I =]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$I =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$

Fonctions composées :

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Exemples
$f = (u + v)$		$\int (x^2 + e^x) =$
$f = k \times u$		$\int \left(\frac{5}{x}\right) =$
$f = \left(\frac{u'}{\sqrt{u}}\right)$		$\int \left(\frac{5}{\sqrt{5x-2}}\right) =$
$f = (u'e^u)$		$\int (-2xe^{-x^2}) =$
$f = \left(\frac{u'}{u}\right)$		$\int \left(\frac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) =$
$f = (u'u^n)$		$\int (2x(x^2 - 3)^3) =$
$f = \left(\frac{u'}{u^n}\right)$		$\int \left(\frac{3x^2}{(x^3 - 7)^4}\right) =$
$f = \cos(ax + b)$		$\int (\cos(3x - 1)) =$
$f = \sin(ax + b)$		$\int (\sin(3 - 7x)) =$