Chapitre 6 : Loi binomiale

1 Loi de Bernoulli

Définition

Une .... de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues (le succès et l'échec), telle que la probabilité de succès est égale à p.

Exemple

- Le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention de « pile » est un succès, est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
- Essayer de deviner la valeur d'une carte tirée au hasard dans un jeu de 52 cartes est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{13}$.

Définition

Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- la probabilité d'obtenir un succès égale à p.
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.

<u>Convention :</u> Au succès, on peut associer le nombre 1
et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

- $E(X) =$
- $V(X) =$
- $\sigma(X) =$

Démonstration : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

Donc l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $E(X) = p$. ■

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2 = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2 \\ &= p \times (1-p)^2 + (1-p) \times (0-p)^2 \quad = \quad p \times (1-p)^2 + p^2 \times (1-p) \\ &= p(1-p)(1-p+p) \quad = \quad p(1-p) \end{aligned}$$

Donc la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut $V(X) = p(1 - p)$. ■

2 Indépendance

Définition

Soit une suite d'expériences aléatoires. Si le résultat d'une expérience ne dépend pas des précédentes, ces expériences sont dites ....

Propriété

Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues A_1, A_2, ..., A_n ont pour probabilité $P(A_1)$, $P(A_2)$, .., $P(A_n)$ alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, ..., A_n)$ est égale aux produits de leurs probabilités $P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n)$.

Exemple

On lance un dé à six faces 4 fois de suite. On considère les issues suivantes :

- A : On obtient un nombre pair.
- B : On obtient un 1.
- C : On obtient un 3 ou un 5.

La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est : $P(A; B; A; C) =$

3 Loi binomiale

Définition

On appelle .... de paramètres n et p la répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p, identiques et indépendantes.

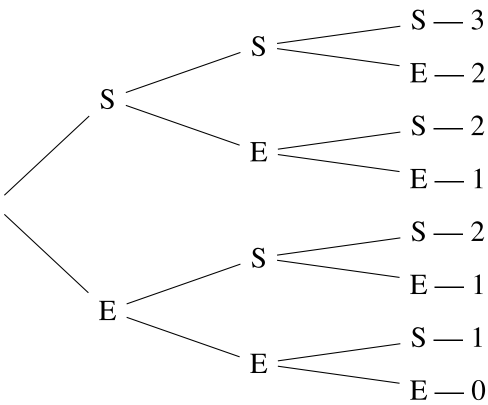
Exemple

Le lancer huit fois de suite d'une pièce de monnaie équilibrée, où l'obtention d'un pile représente un succès, est un schéma de Bernoulli de paramètres 8 et $\frac{1}{2}$.

Définition

À un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on associe la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de succès. On appelle .... la loi suivie par cette variable aléatoire X.

L'arbre ci-contre représente un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et p (par exemple, on lance une pièce de monnaies trois fois de suite). Les S représentent les succès, les E les échecs. Le nombre de droite correspond au nombre de succès de chaque branche.



— $P(X = 3) =$
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à $p \times p \times p$.

— $P(X = 2) =$
car $X = 2$ correspond aux suites d'issues suivantes :

- (S ; S ; E)
- (S ; E ; S)
- (E ; S ; S)

Rédaction : Avant d'utiliser une loi binomiale, il faut vérifier que les conditions suivantes sont bien remplies :

- On répète la même expérience aléatoire
- On répète de manière indépendante
- Cette expérience a 2 issues (Succès et Echec)
- X la variable aléatoire compte le nombre de succès

Si toutes ces conditions sont remplies, X suit une loi binomiale.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$.

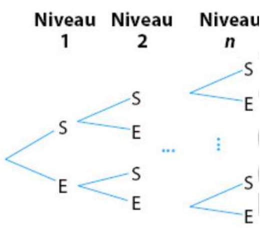
$$P(X = k) =$$

Démonstration exigible

- Chaque branche comportant k succès a également $n - k$ échecs (car on a un total de n épreuves), donc la probabilité à l'issue de cette branche est $p^k(1-p)^{n-k}$.
- Il reste à déterminer le nombre de chemins comportant : k succès.

  De chaque nœud de cet arbre partent deux branches : S (succès) et E (échec).

  Un chemin peut être représenté par une succession de n cases où l'on inscrit la lettre S ou E.



  Choisir une branche à k succès, c'est comme choisir k emplacements pour S dans une liste à n éléments.

  Le nombre de chemins avec k succès ($0 \leq k \leq n$) est le nombre de choix de k cases parmi n où l'on inscrit la lettre S.

  Ces choix sont les combinaisons de k positions parmi n (pas de répétitions et pas d'ordre).

  Le nombre de chemins à k succès est donc $\binom{n}{k}$.

- Ainsi : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

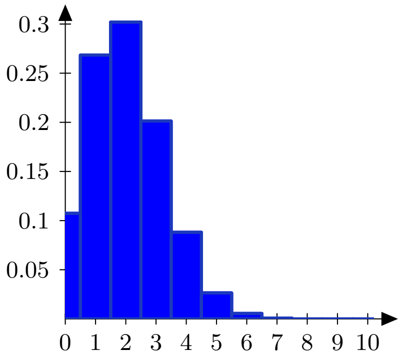
Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p.

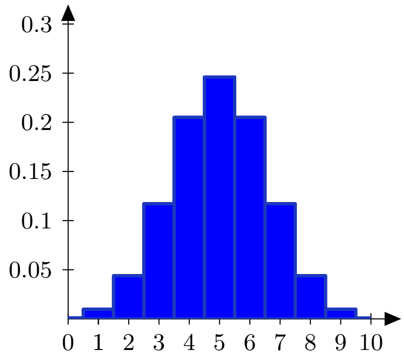
- $E(X) =$
- $V(X) =$
- $\sigma(X) =$

4 Représentation graphique

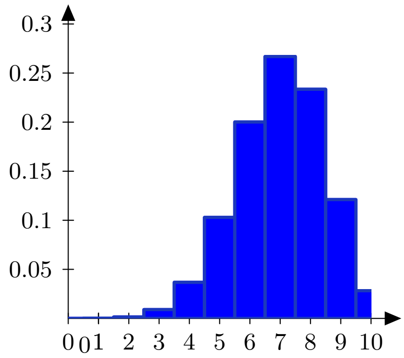
On représente la loi Binomiale à l'aide d'un diagramme en bâtons, en indiquant les nombres de succès en abscisses et les probabilités des événements $\{X = k\}$ en ordonnées. Pour $n = 10$ et différentes valeurs de p.



Pour $p = 0.2$



Pour $p = 0.5$



Pour $p = 0.7$

5 Échantillonage

Définition

Soient :

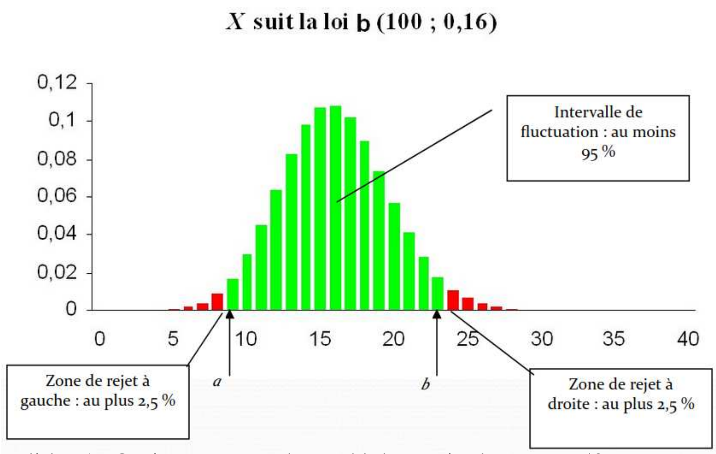
- X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres p et n ;
- a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$; • b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

L'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est appelé .... de $\frac{X}{n}$.

Remarque

Cela signifie que la probabilité que la variable aléatoire $\frac{X}{n}$ *appartienne à* $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ *est supérieure à 95 %.*

En d'autres termes : $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.



Exemple

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.

1. Déterminer des réels a et b tels que $P(a \leq X \leq b) \geq 0.95$
2. Donner une interprétation du résultat précédent.

- La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = \ldots$ et $p = \ldots$.
- On cherche l'entier a le plus petit possible tel que : $P(X \leq a) > 0.025$. On trouve grâce à la calculatrice : $a = \ldots$
- On détermine ensuite b, l'entier le plus petit possible tel que : $P(X \leq b) \geq 0.975$. On trouve grâce à la calculatrice : $b = \ldots$
- Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0.95$
- Cela signifie qu'avec au moins 95% de chance (parmi les 50 personnes interrogées), il y a entre ... et ... personnes qui ont voté pour la candidat A.
- Or, $\frac{21}{50} = 42\%$ et $\frac{34}{50} = 68\%$

  Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42% et 68% des électeurs qui votent pour le candidat A.

  L'intervalle $[\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots]$ s'appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95%