Chap 17 : Calcul intégral (Partie 2)

Mathématiques

A. OLLIVIER

Théorème (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

Théorème (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration :

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx =$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\begin{aligned}\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx &= \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\begin{aligned}\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx &= \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on a :

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx$$
$$= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx =$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\begin{aligned}\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx &= \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

<u>Démonstration :</u> Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue

$$\begin{aligned}\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx &= \int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[u(x)v(x)\right]_a^b \\ \int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\end{aligned}$$

Calculons $I = \int_0^1 x \times e^x \, \mathrm{d}x$

Calculons $I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Calculons $I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

Calculons $I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\text{Calculons } I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \times e^x dx =$$

$$\text{Calculons } I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \times e^x dx = [x\,(e^x)]_0^1 - \int_0^1 1 \times (e^x)\,dx$$

$$\text{Calculons } I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \times e^x dx &= [x(e^x)]_0^1 - \int_0^1 1 \times (e^x)\, dx \\ &= 1e^1 - 0e^0 - [e^x]_0^1 \end{aligned}$$

$$\text{Calculons } I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.
Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \times e^x dx &= [x\,(e^x)]_0^1 - \int_0^1 1 \times (e^x)\,dx \\ &= 1\mathrm{e}^1 - 0\mathrm{e}^0 - [e^x]_0^1 \\ &= \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right)\end{aligned}$$

Calculons $I = \int_0^1 x \times e^x \mathrm{d}x$

Propriété (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que u' et v' sont continues sur I.

Alors, $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \times e^x dx &= [x(e^x)]_0^1 - \int_0^1 1 \times (e^x)\, dx \\ &= 1\mathrm{e}^1 - 0\mathrm{e}^0 - [e^x]_0^1 \\ &= \mathrm{e}^1 - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[\,a\,;b\,]$, $f(x) \geq g(x)$

Propriété

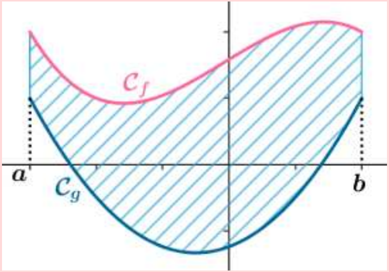
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[\,a\,;b\,]$, $f(x) \geq g(x)$
L'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[\,a\,;b\,]$, $f(x) \geq g(x)$
L'aire de la surface délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :

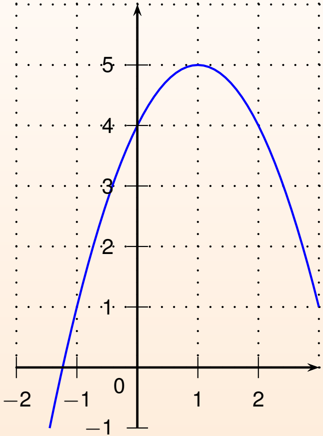
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x$$



Exemple

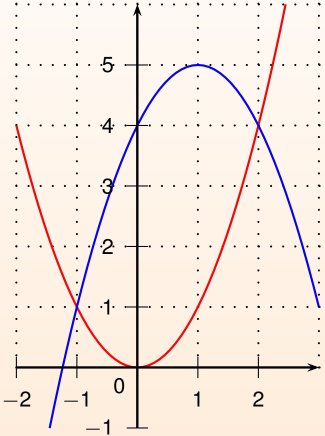
Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.



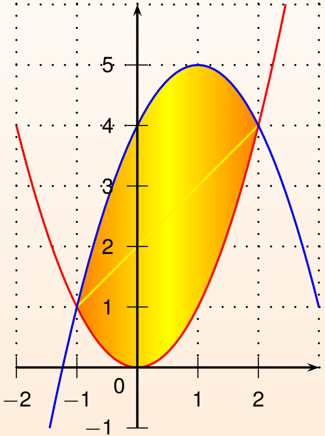
Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.



Exemple

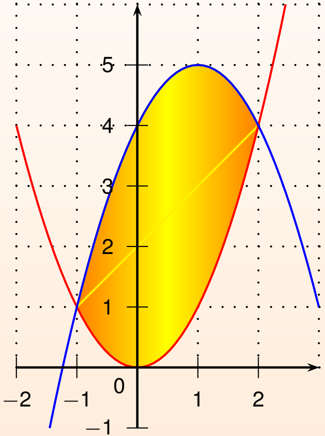
Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.



Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx$$

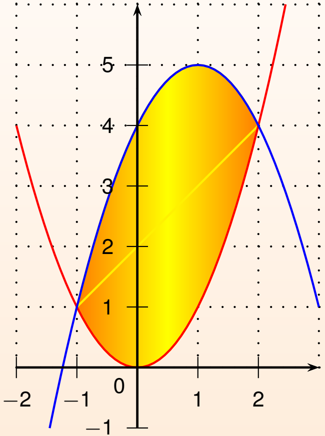


Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right) dx$$



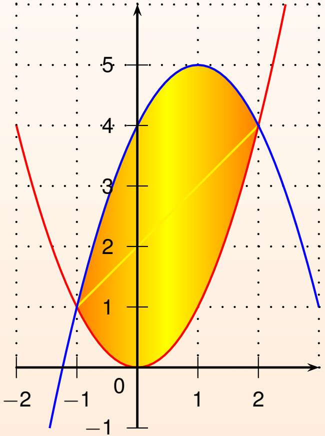
Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$



Exemple

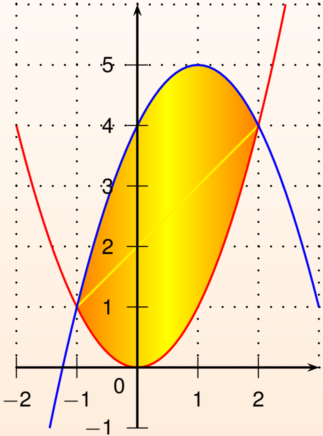
Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$



Exemple

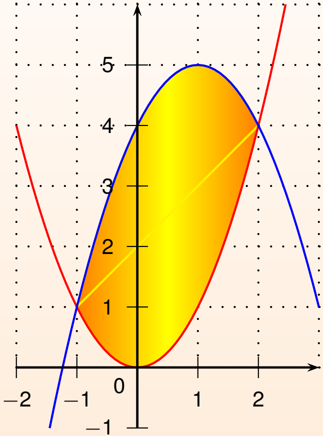
Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$$

$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$



Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

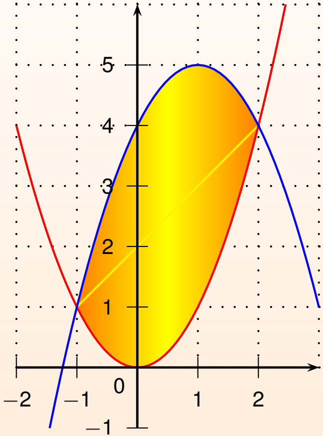
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{20}{3} -$$



Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

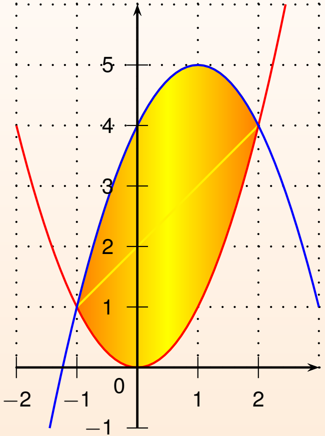
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) \text{ u.a.}$$



Exemple

Déterminons l'aire de la portion du plan limitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = x^2$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

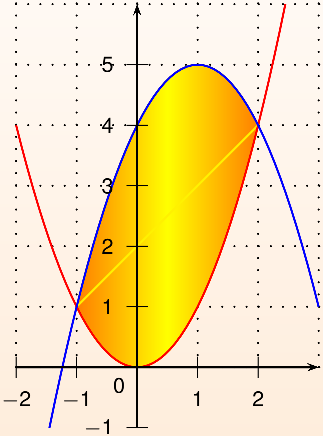
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2)\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left[-2 \times \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) \text{ u.a.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 9 \text{ u.a.}}$$

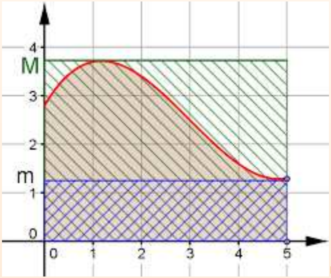


Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et si $a < b$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

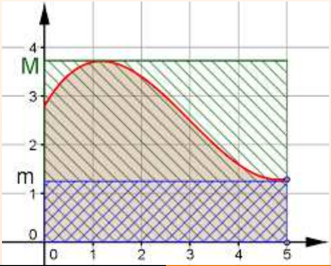


Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)M$$

et si $a < b$, ...

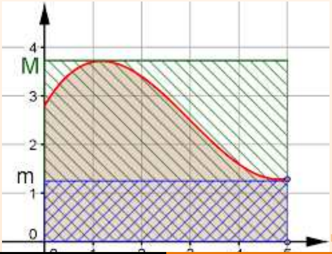


Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)M$$

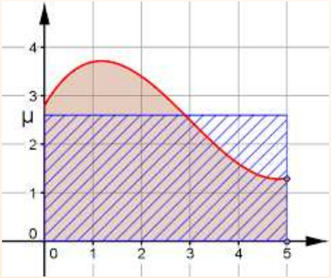
et si $a < b$, $\quad m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M$



Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

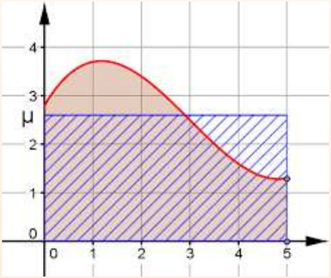
. . . .



Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.
On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Exemple

La valeur moyenne sur $[-1\,;1]$ de la fonction carré est :

Exemple

La valeur moyenne sur $[\,-1\,;\,1\,]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple

La valeur moyenne sur $[\,-1\,;1\,]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$

Exemple

La valeur moyenne sur $[-1\,;1]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

Exemple

La valeur moyenne sur $[\,-1\,;\,1\,]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

Exemple

La valeur moyenne sur $[-1\,;1]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\mu = \frac{1}{3}$$