Chapitre 15 : Intégration (Partie 1)

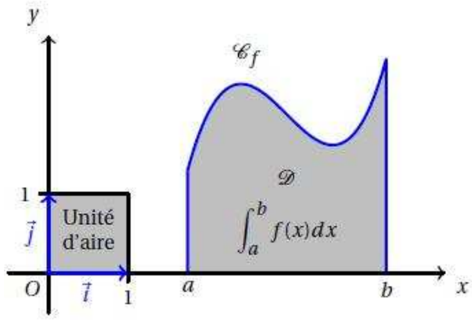
1 Intégrale d'une fonction continue

1.1 Fonctions positives

Définition

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;I,J)$.
On appelle **unité d'aire**, l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.

On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$, ...
....
....



L'intégrale de f sur $[a;b]$ se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On dit aussi que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ représente **l'aire sous la courbe** entre a et b.

Remarque
Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$*, x est une lettre " muette ". On peut la remplacer par n'importe qu'elle autre lettre, exceptées a et b :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \dots$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit aussi " somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ".

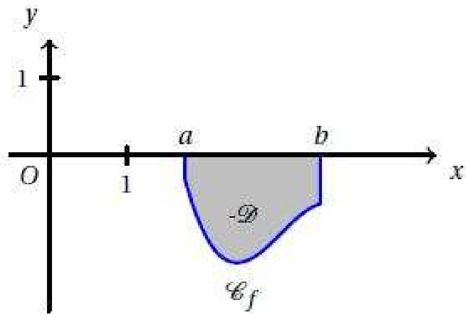
On étend la notion d'intégrale pour une fonction non positives :

1.2 Fonctions négatives

Définition

Si f est un fonction continue, négative sur $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et on note :

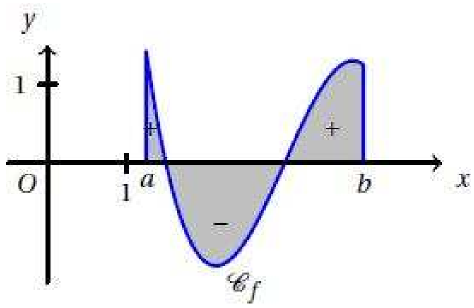
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\text{Aire}(\mathcal{D})$$



1.3 Fonctions quelconques

Définition

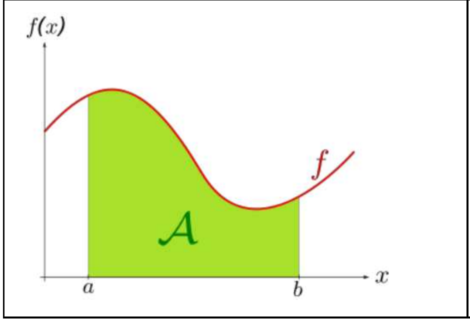
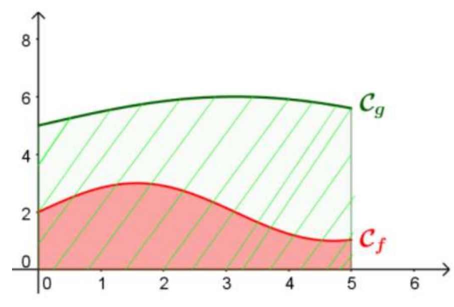
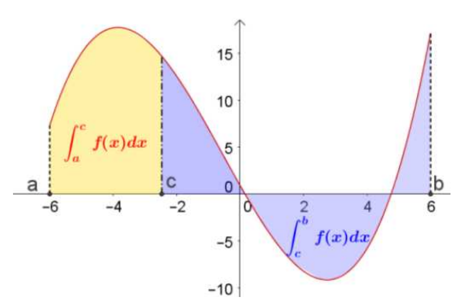
Si f est un fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence entre l'aire obtenue quand f est positive et l'aire obtenue quand f est négative.



1.4 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \dots$	$\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$ ....

Positivité	**Relation d'ordre**	**Relation de Chasles**
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \ldots\ldots$	Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \ldots\ldots$	$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ....
		

2 Encadrement

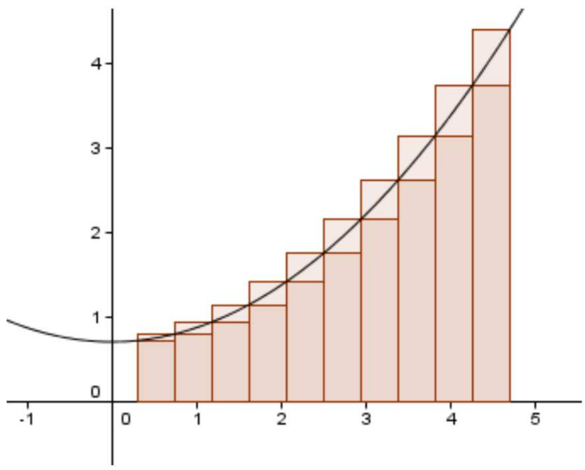
Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a;b]$ et n un entier strictement positif.

On partage $[a;b]$ en n intervalles d'amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, où i varie de 0 à $n-1$, on a l'encadrement

....

Donc ....



où à gauche et à droite, les produits sont des aires de rectangles.

On obtient alors l'encadrement suivant :

....

On peut écrire un programme afin d'effectuer ce calcul.

Algorithme

Les variables sont a et b les bornes de l'intervalle, n le nombre de rectangles, h le pas (largeur des rectangles, x l'abscisse courante, Iinf et Isup les sommes des aires.

```
h ← (b − a)/n
Iinf ← 0
Isup ← 0
x ← a
POUR i variant de 0 à n − 1
    Iinf ← Iinf +f(x)
    x ← x + h
    Isup ← Isup +f(x)
FIN POUR
Iinf ← h*Iinf
Isup ← h*Isup
```

Si la fonction f est simplement continue sur $[a;b]$, on peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale en approximant, sur chaque intervalle $[a+ih; a+(i+1)h]$, $f(x)$ par $f(a+(i+1/2)h)$.

3 Liens Primitives-Intégrales

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$; la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

....

....

Démonstration dans le cas où f est croissante

Pour tout $x\in[a;b]$ et $h>0$, ...

Or $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t+\int_x^a f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$

Ainsi $F(x+h)-F(x)$ est ....

....

On sait que f est croissante sur $[a,b]$.

On a donc ....

....

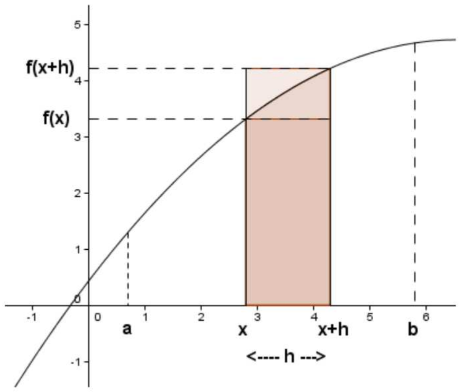
Puisque la fonction f est continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=$ ......

donc, d'après le théorème des gendarmes,

....

....

....



Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.

Alors ....

On note :

....

Démonstration

....

....

....

....

....

....

On généralise la notion d'intégrale :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels quelconques de I et F une primitive de f sur I.

....

On note :

....

Exemple Pour $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x - \ln 1 = \ln x$

Notation

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquence

On peut donc réécrire la définition de cette façon : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x =$

Remarque

Toutes les propriétés vues sur les intégrales (dans un chapitre précédent : linéarité, relation de Chasles, inégalités, bornes) peuvent se démontrer avec la définition vue plus haut.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$	$\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \ldots$	$\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$ ....
Démonstration :	Démonstration :	Démonstration :	Démonstration :

Positivité	**Relation d'ordre**	**Relation de Chasles**
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \ldots\ldots$	Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \ldots\ldots$	$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ....
Démonstration :	Démonstration : *Aide : considérer la fonction $h = g - f$.*	Démonstration :