Chap 5 : Limites de fonctions

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2021-2022

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient ....

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement :

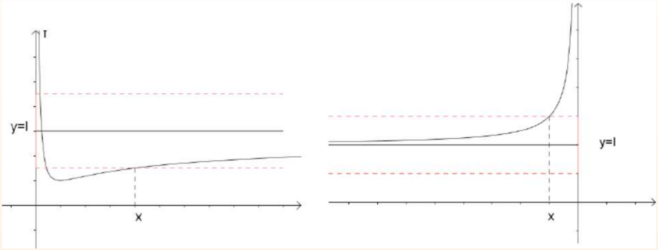


FIGURE – *A gauche limite en* $+\infty$ *et à droite en* $-\infty$

Graphiquement :

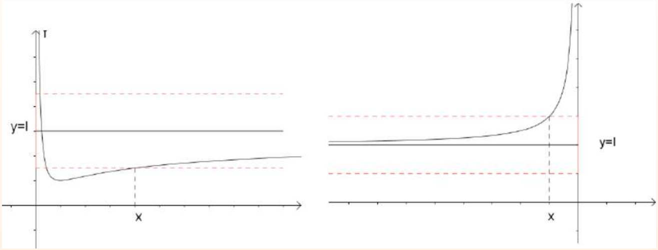


FIGURE – *A gauche limite en $+\infty$ et à droite en $-\infty$*

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est . . . .
. . . .

Graphiquement :

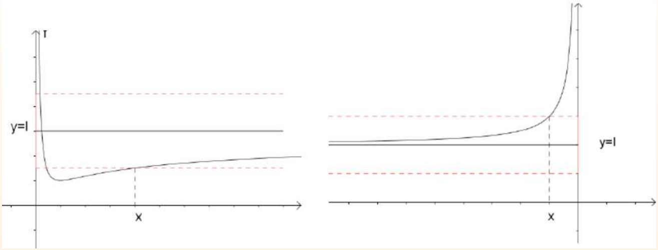


FIGURE – *A gauche limite en* $+\infty$ *et à droite en* $-\infty$

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemples :

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient ....

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemples :

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 =$$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient ....

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a.

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient . . . .
. . . .
. . . .

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

Définition

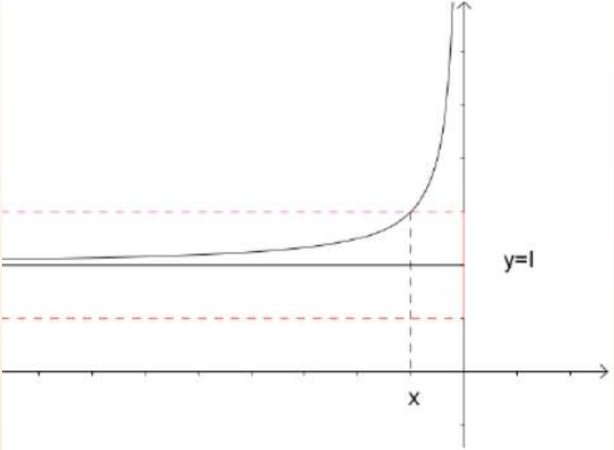
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a, x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

Remarque : on définit de façon analogue $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Graphiquement :



Définition

Lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est ....

Définition

Lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

Exemples :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}",$$

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

$$"\infty - \infty", \quad "0 \times \infty", \quad "\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) =$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) =$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0.$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et par inverse : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$

On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) =$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) =$

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation

Limite en 2^+ et en 2^- :

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$ et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$et par inverse : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$.

On a alors une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = \ldots$

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Théorème

a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si on a $\lim\limits_{x \longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} v(x) = c$

alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Exemple :

Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty$$

Exemple :

Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

Exemple :
Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.

On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

$$x \longrightarrow -2x+1 \longrightarrow (-2x+1)^2$$

On a :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (-2x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \longrightarrow -\infty} X^2 = +\infty$$

et donc par composition :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ldots$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.

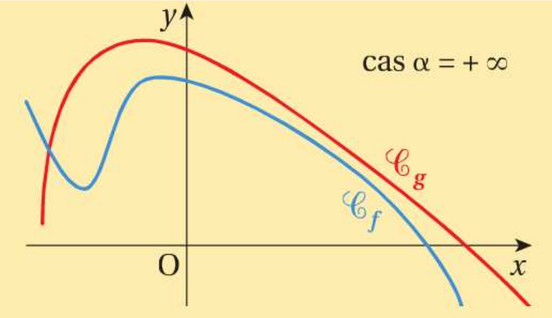
Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.

Minoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Majoration : si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Illustration du théorème de majoration en $+\infty$:



Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors ....

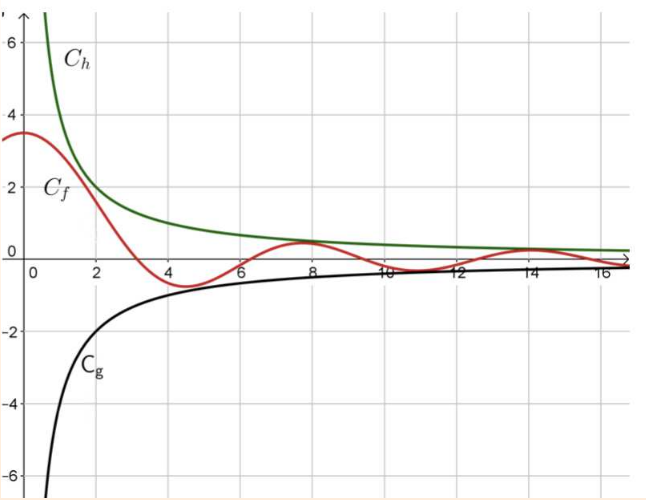
Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.
Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.


C_h
C_f
C_g
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
2
4
6
8
10
12
14
16

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{x} = \ldots\ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Théorème

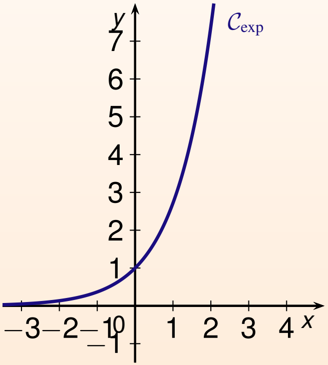
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \ldots$$

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

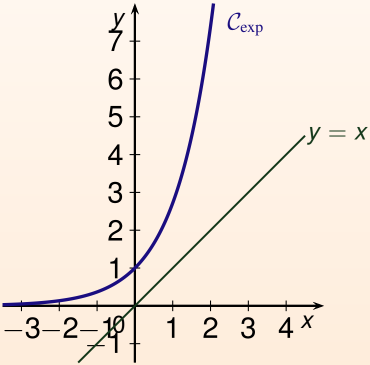
Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$



Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$$



Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$

Démonstration exigible

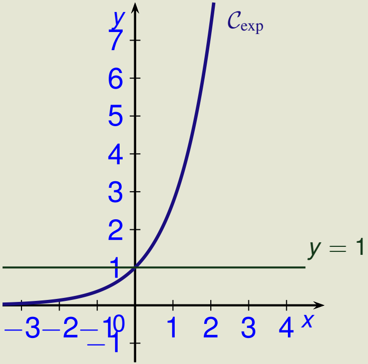
On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.



Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$ et donc, $f'(x)\geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0)=1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$ d'où : $e^x > x$.

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) > 0$ d'où : $e^x > x$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $f'(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction f est donc croissante et de plus $f(0) = 1$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) > 0$ d'où : $\mathrm{e}^x > x$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Démonstration exigible

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x =$$

Démonstration exigible

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} =$$

Démonstration exigible

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} =$$

Démonstration exigible

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Démonstration exigible

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$ (par inverse en utilisant le résultat précédent).

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \ldots\ldots$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \ldots\ldots$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}.$$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}.$$

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) =$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par
$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :
$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

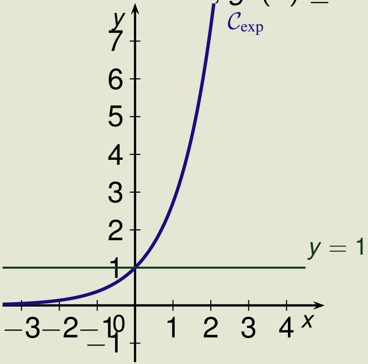
Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.



Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g''(x)$	0

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g''(x)$	0 $\qquad\qquad$ $+$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = \mathrm{e}^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$	

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par

$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

$g'(x) = e^x - x$ Pour déterminer le signe de g' on va dériver g' :

$g''(x) = (g'(x))' = e^x - 1$ et donc, $g''(x) \geq 0$ sur $[0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$			

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1		
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$			

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$		$\nearrow$	

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$	1	$\nearrow$	

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$	1	$\nearrow$	

La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$	1	$\nearrow$	

La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$ et de plus $g(0) = 1$.

Démonstration exigible

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	1	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$	1	$\nearrow$	

La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$ et de plus $g(0) = 1$.
On en déduit que, pour tout $x \in [0; +\infty[,\ g(x) > 0$,

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1;+\infty[,\ g(x) > 0,$

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1;+\infty[,\ g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1; +\infty[,\ g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit :

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit : $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit :

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit :

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison,

Démonstration exigible

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $g(x) > 0$, c'est à dire : $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ soit :

$\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

<u>1er Cas :</u> Si $n = 0$:

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

<u>1$^{\text{er}}$ Cas :</u> Si $n = 0$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} =$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

1^er^ Cas : Si $n = 0$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{x^0} =$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

1er Cas : Si $n = 0$:

$\forall x > 0 : \dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{x^0} = \dfrac{e^x}{1} =$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

<u>1^er Cas :</u> Si $n = 0$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{x^0} = \dfrac{e^x}{1} = e^x$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

<u>1^er Cas :</u> Si $n = 0$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{x^0} = \dfrac{e^x}{1} = e^x$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Démonstration exigible

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$:

<u>1^er Cas :</u> Si $n = 0$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{e^x}{x^0} = \dfrac{e^x}{1} = e^x$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty}$ pour $n = 0$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} =$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$\forall x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n}$ car $(e^a)^n = e^{na}$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n$$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Démonstration exigible

<u>2e Cas :</u> Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

Démonstration exigible

<u>2^e Cas :</u> Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour $n \geq 1$:

$$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1 \times e^{\frac{x}{n}}}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car $\dfrac{1}{n} > 0$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$ par produit de n limites infinies.

Démonstration exigible

2e Cas : Montrons que : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ pour $n\geq 1$:

$$\forall x>0:\ \frac{e^x}{x^n}=\frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n}=\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n=\left(\frac{1\times e^{\frac{x}{n}}}{n\times\frac{x}{n}}\right)^n=\left(\frac{1}{n}\times\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$ car on a vu que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=+\infty$ car $\dfrac{1}{n}>0$

D'où $\displaystyle\lim_{x\rightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n=+\infty$ par produit de n limites infinies.

Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{x} = \dots$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{x} = 0$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n e^x = \ldots$$

Théorème

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$.

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :
$$x^n e^x = (-y)^n e^{-y}$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \end{aligned}$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \end{aligned}$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \end{aligned}$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\frac{e^y}{y^n}} \end{aligned}$$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\frac{e^y}{y^n}} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x =$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\frac{e^y}{y^n}} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{y \to +\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\frac{e^y}{y^n}} =$

Démonstration exigible

Posons $y = -x$. Quand $x \to -\infty$, $y \to +\infty$.

Or :

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-y)^n e^{-y} \\ &= (-1 \times y)^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n y^n \frac{1}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{y^n}{e^y} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\frac{e^y}{y^n}} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{y \to +\infty} (-1)^n \frac{1}{\frac{e^y}{y^n}} = 0$ car $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^n} = +\infty$