Chapitre 5 : Limites de fonction

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient ....

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque :

On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Graphiquement :

Lorsque f a pour limite ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), on dit que, dans un repère, la droite d d'équation $y = \ell$ est ....

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \dots \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dots \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \dots \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \dots$

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient ....

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque :

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = \dots \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \dots \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \dots \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \dots$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = \dots \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \dots \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = \dots$

2 Limite infinie d'une fonction en un réel a

2.1 Limite infinie

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient ....

On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

2.2 Limite à droite ou à gauche

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a à droite (resp. à gauche) signifie que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient ....

x restant strictement supérieur à a (resp. strictement inférieur à a).

On note $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty$).

Remarque :
On définit de façon analogue $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Graphiquement :

Définition : lorsque f a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en a, (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x = a$ est ....

Exemple

$\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = \dots$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = \dots$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \dots$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dots$

3 Limites et opérations

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus avec les suites.
On retient qu'on ne peut pas conclure directement dans les cas des formes indéterminées, du type :

....

Exemple de recherche de limites :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

Limite en $+\infty$:

Limite en 2^+ et en 2^- :

3.1 Limite d'une composée

Théorème

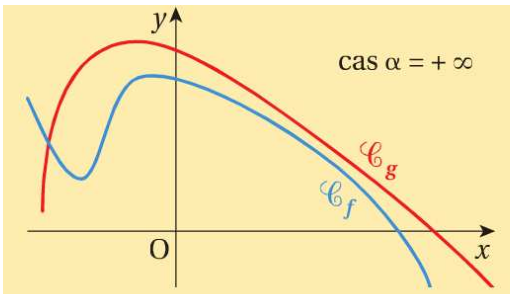
a, b et c désignent trois réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x\longrightarrow a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a} v\circ u(x) = \dots$

Exemple : Soit $f(x) = (-2x+1)^2$.
On peut décomposer f en enchaînement de fonctions :

On a :

4 Limite et comparaisons

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus pour les suites.



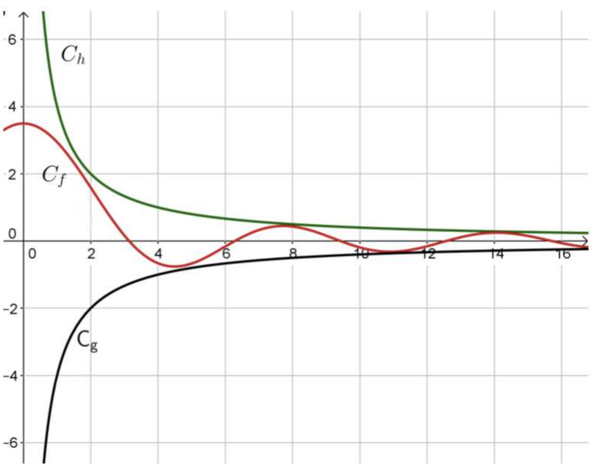
Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
Minoration : si $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = \dots$
Majoration : si $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \dots$

Théorème (Théorème des gendarmes)

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, on ait $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} h(x) = \ell$, où ℓ est un nombre réel.

Alors ....



Remarque : on obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.
Exemple :
Soit $f(x) = \dfrac{4\sin x}{x}$ pour $x \in]0;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

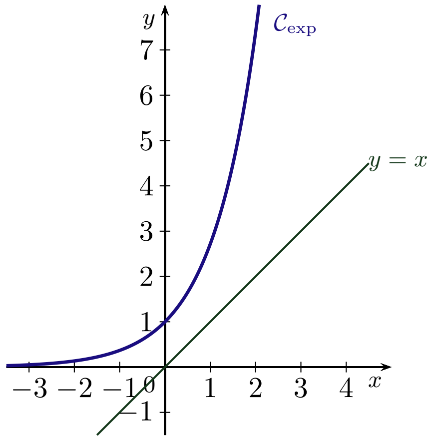
D'où : $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Comme $x > 0$, par division, on a : $\dfrac{-4}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{4}{x}$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{-4}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{-4}{x} = 0,$

Donc par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 0.$

5 Limites de la fonction exponentielle



Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots$$

Démonstration exigible

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x\mathrm{e}^x = \ldots \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n\mathrm{e}^x = \ldots$$

Démonstration exigible

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.