Chapitre 8 : Fonction logarithme

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel unique x tel que $\mathrm{e}^x = a$.

Définition

Si a est un réel strictement positif, la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{e}^x = a$, d'inconnue x, s'appelle ....

Définition

La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par : ....
Autrement dit, pour tout x strictement positif,

....

On dit que la fonction $\ln$ est la .... de la fonction $\exp$.
Ainsi : $\ln 1 = 0$ puisque $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\ln \mathrm{e} = 1$ puisque $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

De plus : si $\ln x = y$ alors $x = \mathrm{e}^y$ et $\dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^{-y}$ soit $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -y$.

On obtient donc, pour tout réel x strictement positif : $\boxed{\ln\dfrac{1}{x} = \ldots\ldots}$

Propriété

Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

1.2 Variations et limites

Propriété

La fonction logarithme népérien est ....

Démonstration partielle

On admet que la fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Si on pose $f(x) = \exp(\ln x) = x$, alors $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Or $f'(x) = 1$, d'où $\ln'(x) = \ldots$

Théorème

La fonction logarithme népérien est ....

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$; puisque sa dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty[$, on conclut que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaire

Pour tout réels a et b strictement positifs,

....

En particulier : $0 < x < 1$ équivaut à $\ln x < 0$ et $x > 1$ équivaut à $\ln x > 0$.

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = \ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \ldots\ldots$$

Démonstration

On utilise la définition d'une limite infinie à l'infini : ....
....

Ensuite : $\displaystyle\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} \ln x = \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ x>0}} -\ln\frac{1}{x}$; or, ...

Donc, par composition, on obtient ....

Tableau de variation et représentation graphique

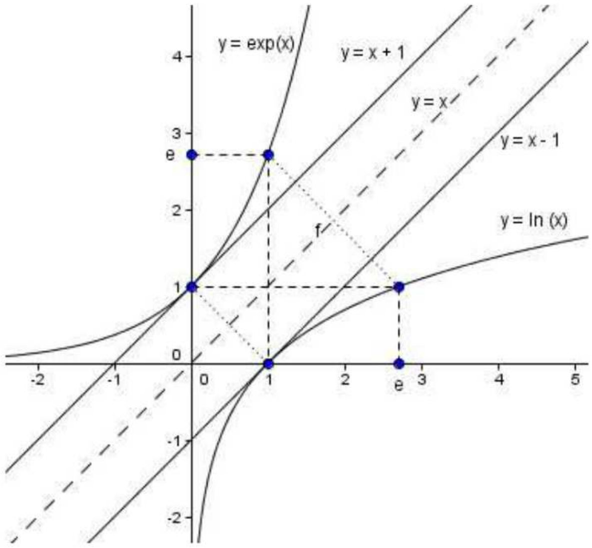
On construit le tableau de variation à l'aide des résultats précédents. Puisque la fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$, les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La courbe passe par les points de coordonnées $(1; 0)$ et $(\mathrm{e}; 1)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\ln'(1) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote d'équation $x = 0$, soit l'axe des ordonnées.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	
$\ln x$	



1.3 Relation fonctionnelle

La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction $\exp$. On peut donc déduire une relation fonctionnelle pour la fonction $\ln$ à partir de celle existant pour la fonction $\exp$:

pour tout réels x et y, $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$

donc $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x + y)) = x + y$;

si on pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$, soit $x = \ln a$ et $y = \ln b$ on obtient :

Théorème

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs : ....

Remarque

Si $a = b$, la relation fonctionnelle nous donne : $\ln(a^2) = 2\ln a$.

On peut alors en déduire : $\ln x = \ln((\sqrt{x})^2) = 2\ln(\sqrt{x})$, soit $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln x$.

Propriété

Quels que soient les réels a, b strictement positifs et l'entier relatif n :

....

Démonstration

- La deuxième propriété a déjà été prouvée.

- pour la première propriété, on utilise la relation fonctionnelle :

$\ln \dfrac{a}{b} =$ ....

- pour la troisième propriété notée P_n : " $\ln(a^n) = n\ln a$ " ;

nous allons d'abord démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : ....

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour un certain entier naturel k ;
soit ....

Alors $\ln(a^{k+1}) =$ ....

....

Conclusion :.............................

Maintenant, si n est un entier relatif négatif, $\ln(a^n) = \ln \dfrac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$
or $(-n) \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire $\ln(a^{-n}) = (-n)\ln a$
On en déduit que : $\ln(a^n) = n \ln a$.

1.4 Compléments

1.4.1 Calcul de limites

Théorème

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x\ln(x) = \ldots\ldots$$

Démonstration exigible

Propriété (Croissances comparées)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} x^n \ln x = \ldots \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \ldots$$

Démonstration de la première limite

- On sait que pour tout a réel, $a < \exp(a)$ donc pour tout a strictement positif, $\ln a \leq a$. (Croissance de la fonction ln). On en déduit que pour tout x strictement positif $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x}$ d'où $\dfrac{1}{2}\ln x \leq \sqrt{x}$ et donc $\ln x \leq 2\sqrt{x}$.

Alors, pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque

On pouvait aussi écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\exp(X)} = \dfrac{1}{\frac{\exp(X)}{X}}$, en posant $X = \ln x$ et appliquer les théorèmes sur la composition et l'inverse de limites.

1.4.2 Calcul de dérivées

Propriété

si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $\ln \circ u$, notée aussi $\ln u$, est dérivable sur I et

$$(\ln u)'(x) = \ldots\ldots$$

Par exemple, on obtient pour tout $x > -\dfrac{b}{a}$: $(\ln(ax+b))' = \ldots\ldots\ldots$

Remarque

u étant strictement positive, le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'.

Cette dérivée satisfait à la formule générale : $\qquad (v(u(x)))' = u'(x) \times v'(u(x))$