Cours de terminale S
Dérivation, fonctions continues

A. OLLIVIER

Lycée Jacques Prevert - Pont-Audemer

2021-2022

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u}$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x - 3 \xmapsto{v}$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x - 3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x-3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) =$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x-3$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x - 3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ et
$v(x) =$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{u}{\longmapsto} x - 3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x-3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x - 3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) =$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x-3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u(x)$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x - 3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x - 3$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xmapsto{u} x-3 \xmapsto{v} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = x-3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

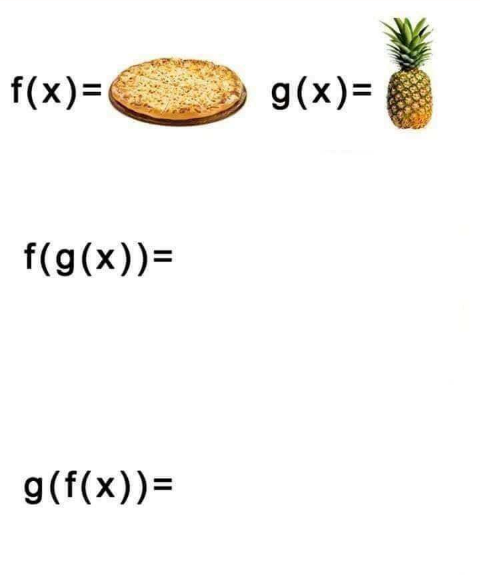
$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x-3}$$

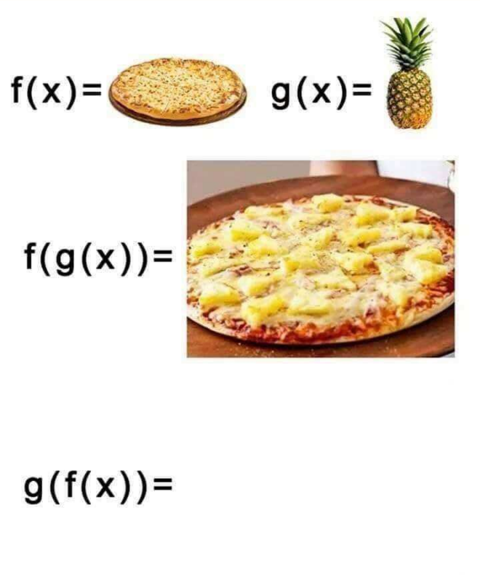
Définition

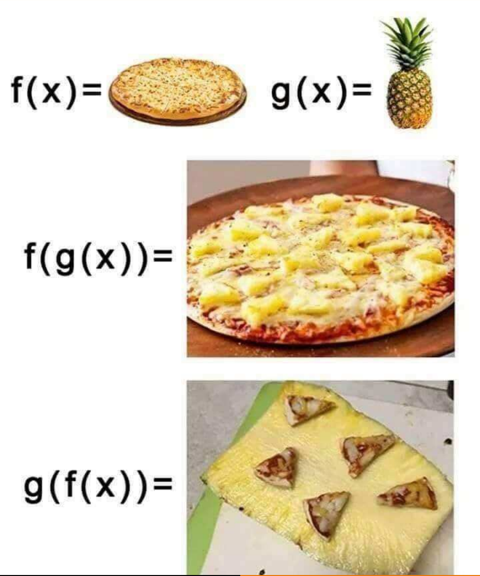
Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$. On appelle fonction .... de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par : $v \circ u(x) = v(u(x))$.

Définition

Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$. On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par : $v \circ u(x) = v(u(x))$.


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=


f(x)=
g(x)=
f(g(x))=
g(f(x))=

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) =$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x))$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$ *et*

$u \circ v(x) =$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2+1}$ *et*

$u \circ v(x) = u(v(x)) =$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$ *et*

$u \circ v(x) = u(v(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 =$

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$ *et* $u \circ v(x) = u(v(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$.

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J.

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$. La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$. La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ou encore $f' = \ldots\ldots\ldots..$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$. La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ ou encore $f' = \ldots\ldots\ldots..$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$. La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ ou encore $f' = v' \circ u \times u'$.

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.
On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) =$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x)$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.
On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.
Alors : $f(x) =$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} =$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$*.*

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$*.*

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) =$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ *et* $v'(x) =$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ *et* $v'(x) = e^x$.

Donc :

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ *et* $v'(x) = e^x$.

Donc :

$$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$.

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(u(x)) \times u'(x) \\ &= e^{x^2+1} \times 2x \end{aligned}$$

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$.

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(u(x)) \times u'(x) \\ &= e^{x^2+1} \times 2x \\ &= 2xe^{x^2+1} \end{aligned}$$

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)}$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' =$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) =$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$,

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- $(u(x))^n) =$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car

  $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.

  Donc $(u(x))^n)' =$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.
  Donc $(u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) =$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.
  Donc $(u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$,

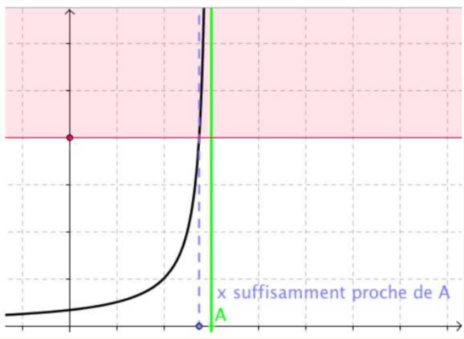
Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car
  $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.
  Donc $(u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$,
  car $v'(x) = nx^{n-1}$.

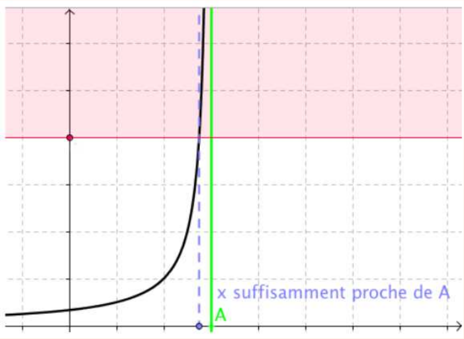
Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.
  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$, car $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.
  Donc $(u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$.
  Ainsi $(u(x))^n)' = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

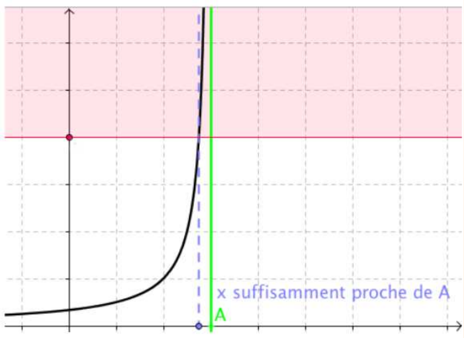
- On dit que la fonction f admet pour limite $\ldots$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.
- On note :



- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.
- On note :



- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.
- On note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$



- Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

• Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

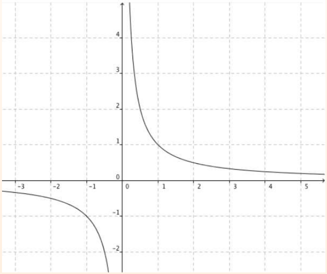
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

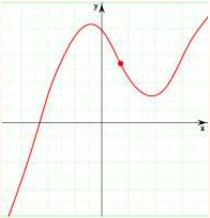
• Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

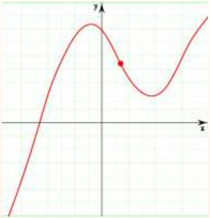
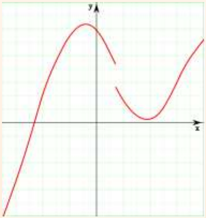
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Quand x tend vers 0 :

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$



	Une fonction f est continue en un point a si on peut atteindre f(a) par la gauche et par la droite en suivant la courbe et « sans lever son crayon ». C'est le cas pour la fonction ci-contre.

	Une fonction f est continue en un point a si on peut atteindre f(a) par la gauche et par la droite en suivant la courbe et « sans lever son crayon ». C'est le cas pour la fonction ci-contre.
	En revanche, dans ce cas, la courbe de f présente une « coupure » en x=a qui oblige à « lever le crayon » pour parcourir la courbe. On dit alors que la fonction f est discontinue au point a.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

D'où : f est continue en a, si :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

D'où : f est continue en a, si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Remarque

*Une fonction définie sur un intervalle I est **continue** sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).*

Remarque

Une fonction définie sur un intervalle I est ***continue*** *sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).*

Exemples :

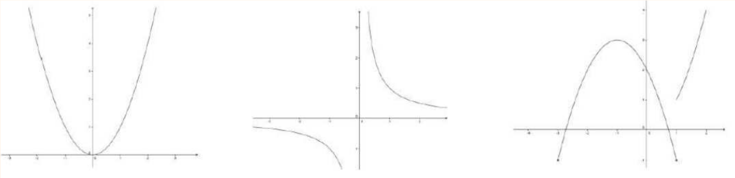


FIGURE – *La fonction carré est continue sur* $\mathbb{R}$*, la fonction inverse est continue sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0;+\infty[$ *mais n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$*. f est définie mais pas continue sur* $[-3;2]$ *; il y a une rupture en* $x=1$*.*

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est .... sur I.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.

- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

Démonstration.

Soit f définie et dérivable sur I et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$

Démonstration.

Soit f définie et dérivable sur I et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Démonstration.

Soit f définie et dérivable sur I et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Démonstration.

Soit f définie et dérivable sur I et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

D'où :

$$h\tau(h) = f(a+h)-f(a)$$

Démonstration.

Soit f définie et dérivable sur I et $a \in I$. Alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

D'où :

$$h\tau(h) = f(a+h) - f(a)$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h =$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) =$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) =$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) =$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) = f(a)$$

Démonstration.

Notons :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est à dire :

$$f(a+h) = h\tau(h) + f(a)$$

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Ainsi $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \longrightarrow 0} h\tau(h) + f(a) = f(a)$$

Ainsi $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$, Donc f est continue en a.

$\square$

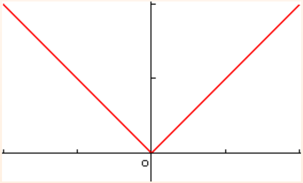
Remarque :

La réciproque de ce théorème est ......

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse : la fonction valeur absolue, par exemple, n'est pas dérivable en 0 mais est continue en 0.



Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur . . . . . .
. . . .

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur . . . . . .
. . . .

Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.