Chapitre 2 : Compléments sur les dérivées

1 Composée de deux fonctions

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-3}$.

La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \overset{\text{u}}{\longmapsto} x-3 \overset{\text{v}}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par $u(x) = \ldots\ \ldots\ \ldots$ et $v(x) = \ldots\ \ldots\ \ldots\,.$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x-3}$$

Définition

Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$. On appelle fonction .... de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par : $v \circ u(x) = v(u(x))$.

Exemple

Considérons les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $v \circ u(x) =$ et $u \circ v(x) =$.

2 Dérivée de composée

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$. La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ou encore $f' = v' \circ u \times u'$.

Exemple

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$.

Alors : $f(x) = e^{x^2+1} = v(u(x))$

On a : $u'(x) =$ et $v'(x) =$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(u(x)) \times u'(x) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

3 Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$\mathbb{R}$	$u'e^u$

Démonstration :

- $\sqrt{u(x)} = v \circ u(x)$ avec $v(x) = \sqrt{x}$.

  Donc $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = v'(u(x)) \times u'(x) =$

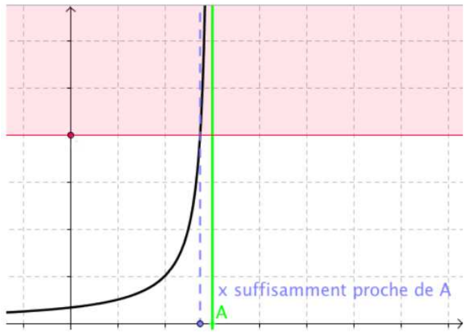
  Ainsi $\left(\sqrt{u(x)}\right)' =$.

- $(u(x))^n) = v \circ u(x)$ avec $v(x) = x^n$.

  Donc $(u(x))^n)' = v'(u(x)) \times u'(x) =$

  Ainsi $(u(x))^n)' =$.

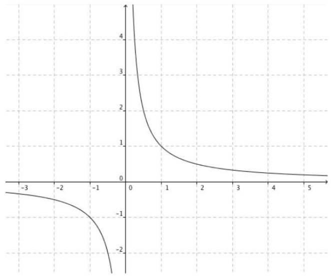
4 Notion intuitive de limites en un réel A



- On dit que la fonction f admet pour limite ...... en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.
- On note :

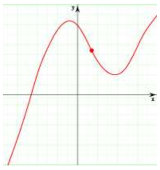
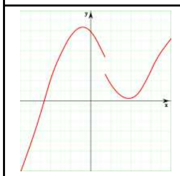
- Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Quand x tend vers 0 :



- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

5 Notion intuitive de continuité

	Une fonction f est continue en un point a si on peut atteindre f(a) par la gauche et par la droite en suivant la courbe et « sans lever son crayon ». C'est le cas pour la fonction ci-contre.
	En revanche, dans ce cas, la courbe de f présente une « coupure » en x=a qui oblige à « lever le crayon » pour parcourir la courbe. On dit alors que la fonction f est discontinue au point a.

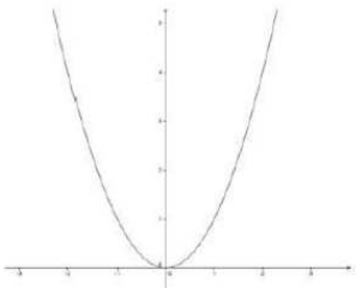
Définition

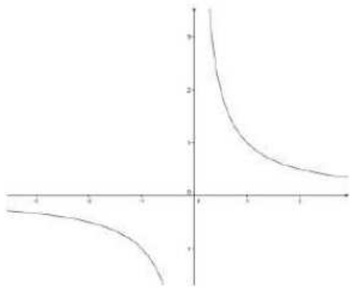
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que f est **continue en a** si ....
- On dit que f **est continue sur I** si elle est continue en tout point de I.

D'où : f est continue en a, si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Exemples :





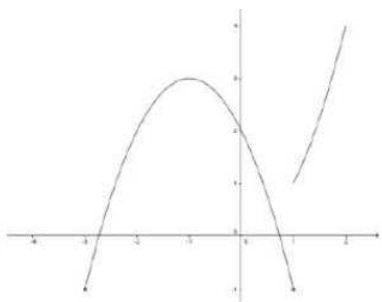


FIGURE 1 – *La fonction carré, la fonction inverse et une fonction f*

La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. f est définie mais pas continue sur $[-3; 2]$; il y a une rupture en $x = 1$.

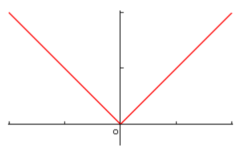
Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est ....sur I.

Attention : ne pas confondre " continuité " et " dérivabilité " :

- Une fonction f est continue en a si sa courbe C_f ne présente pas de ....
- Une fonction f est dérivable en a si sa courbe C_f admet une tangente ....

Remarque : La réciproque de ce théorème est .... : la fonction valeur absolue, par exemple, n'est pas dérivable en 0 mais est continue en 0.



Conséquences :

- Les fonctions " usuelles " (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue) sont continues sur ....
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition sont continues sur ....