Chapitre 4 : Vecteurs, droites, plans de l'espace (partie n°1)

1 Positions relatives de droites et de plans

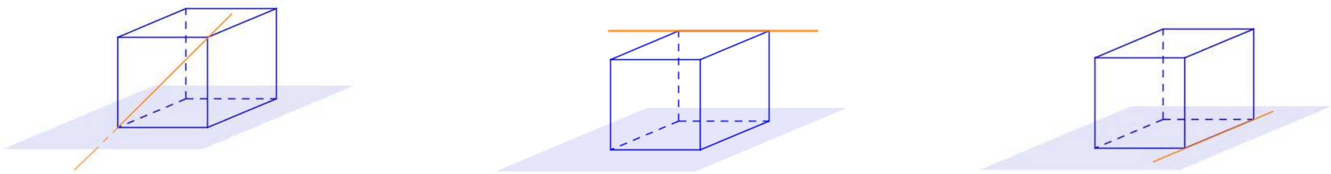
1.1 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite est dite _ _ _ _ _ _ _ _ à un plan si elle est incluse dans le plan ou si le plan et la droite n'ont aucun point en commun.

La droite peut donc être :

- sécantes au plan
- strictement parallèle au plan
- incluse dans le plan



1.2 Positions relatives de deux droites

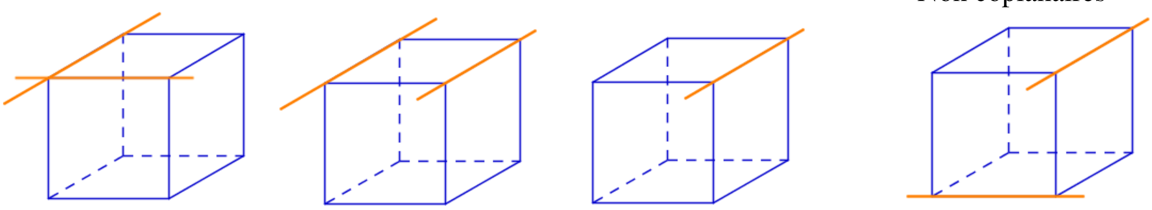
Définition

Deux droites sont dites _ _ _ _ _ _ _ _ _ si elles sont incluses dans un même plan.

Deux droites peuvent donc être :

• Coplanaires : elles sont alors sécantes, strictement parallèles ou confondus.

• Non coplanaires

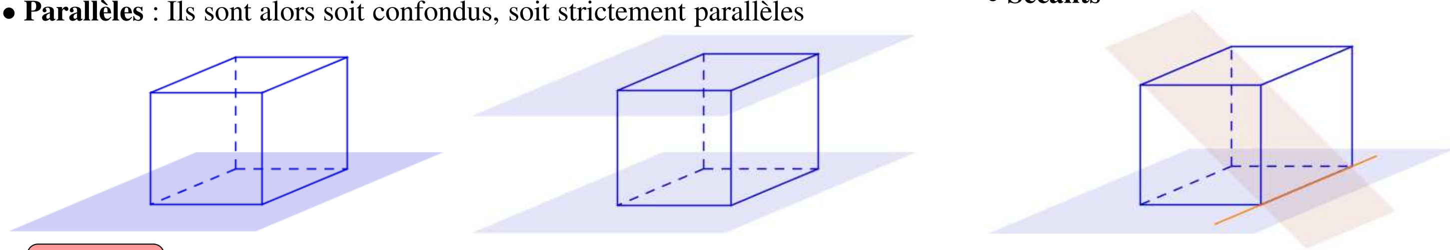


1.3 Positions relatives de deux plans

Deux plans peuvent être :

• **Parallèles** : Ils sont alors soit confondus, soit strictement parallèles

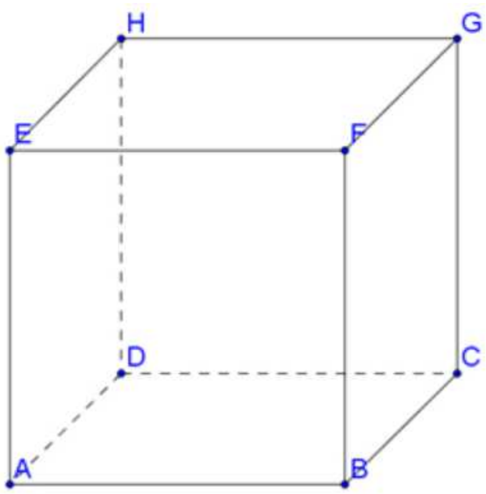
• **Sécants**



Propriété

Si deux plans sont sécants, leur intersection est une _ _ _ _ _ _ _

Exemple du cube

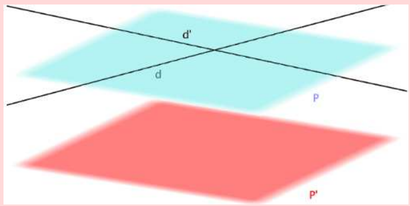


2 Parallélisme

2.1 Entre plans

Propriété

Si un plan P contient deux droites sécantes d et d' parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont _ _ _ _ _ _ _ _ .

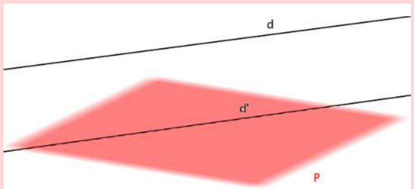


Remarque
Toutes les propriétés de géométrie plane ....

2.2 Entre droites et plans

Propriété

Une droite d est parallèle à un plan P s'il existe une droite d' de P parallèle à d.

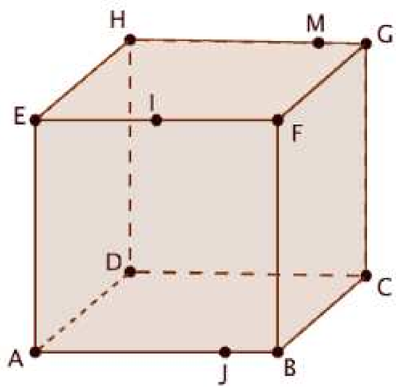


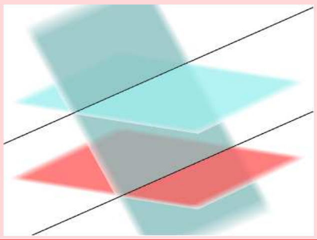
2.3 Entre droites

Propriété

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Construire l'intersection du plan (IMJ) avec le cube ABCDEFGH.

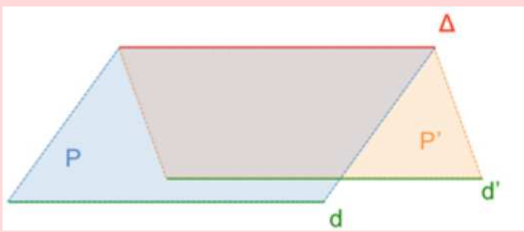




Théorème (du toit (preuve dans la suite du cours))

On considère deux plans P et P' ayant pour intersection la droite Δ.
On considère également deux droites d et d', telles que :
- d est contenue dans P ;
- d' est contenue dans P' ;
- d et d' sont parallèles entre elles.

Alors ....
....



3 Vecteurs de l'espace

Définition

Un .... est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ..

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle .... de vecteur $\overrightarrow{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

Remarque

Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, ...

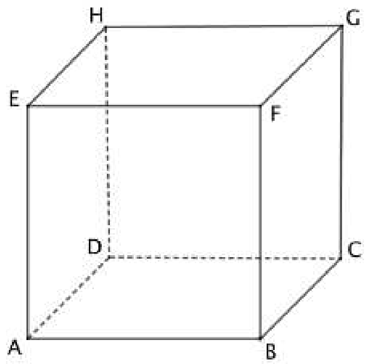
Définition

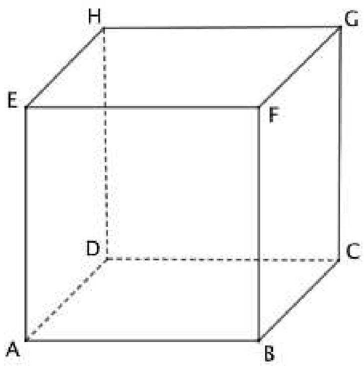
Soit $\overleftarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, avec α, β, γ des réels, est appelé .... des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

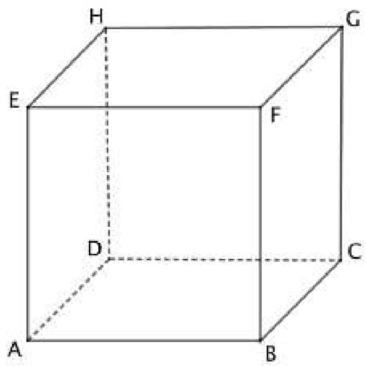
Exemple

A l'aide des cubes ci-contre, représenter les vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ donnés par :

- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
- $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
- $\overrightarrow{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

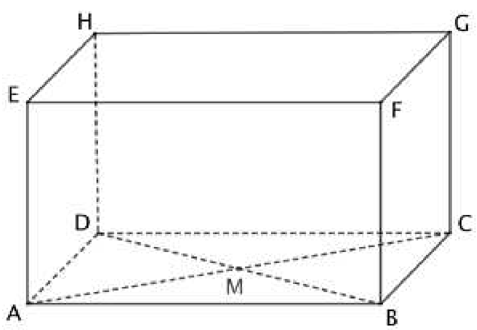




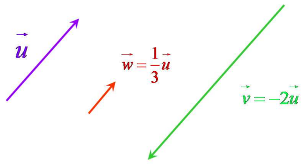


Exemple

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



4 Droites de l'espace



Définition

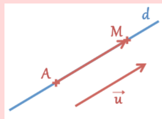
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont .... signifie qu'ils ont même direction, c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Définition

On appelle .... de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

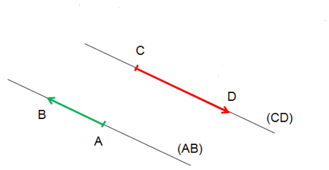
Propriété

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



Propriété

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont .... si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

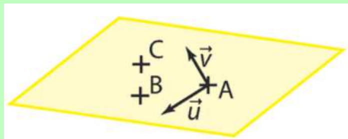


5 Plans de l'espace

Définition

Un plan de l'espace est définie par :

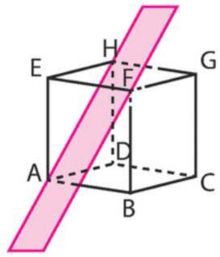
- soit par trois points non alignés (ABC).
- Soit par un point et deux vecteurs non colinéaires $(A; \vec{u}; \vec{v})$



Exemple 

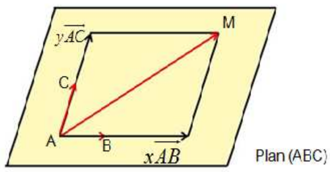
Dans le cube $ABCDEFGH$, le plan (AFH) est déterminé par :

- les trois points A, F et H
- ou bien par le point A et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.



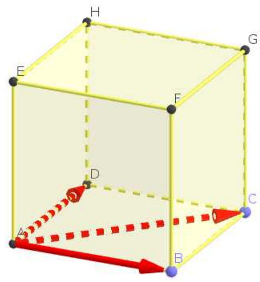
Propriété

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Un point M de l'espace appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux nombres réels x et y tels que : .



Définition

On considère quatre points de l'espace A, B, C et D et trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits .... si les points A, B, C et D sont dans un même plan.



Propriété

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont .... si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

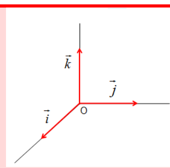
Preuve :

On appelle A, B, C et D des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C définissent donc un plan. D appartient à (ABC) si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Par conséquent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

6 Base et repère de l'espace

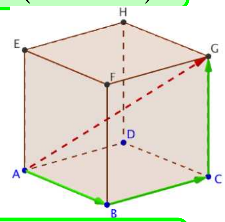
Propriété

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{u}$ =



Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, trois vecteurs non coplanaires de l'espace. On appelle . . . . le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$



Exemple ABCDEFGH est un cube.

1. Reconnaître une base de l'espace.
2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

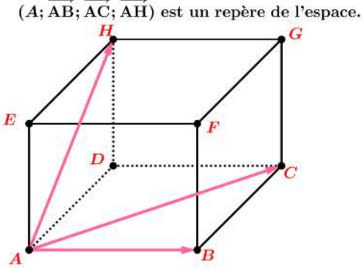
Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.
On appelle **repère de l'espace** le quadruplet : $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

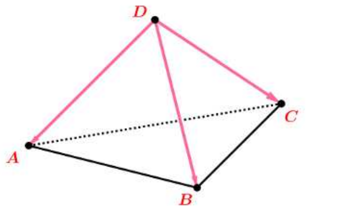
Remarque
Un ***repère*** *: c'est un point, appelé origine et 3 vecteurs non coplanaires, appelés la base du repère.*

Exemple

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH})$ est un repère de l'espace.



$(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})$ est un repère de l'espace.



Définition

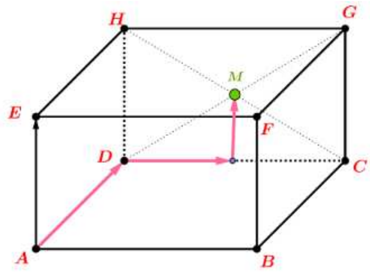
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
x est l'. . . . . du point M, y est l'. . . . . du point M et z est la . . . .
$(x; y; z)$ sont les . . . . de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exemple Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?

On essaye d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

On a :

Donc M a pour coordonnées dans ce repère :



Théorème

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées . . . .
- Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que . . . .
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées : . . . .

Dans un repère orthonormé :

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est $|| \vec{u} || =$ . . . .
- La distance AB est donnée par : $AB =$ . . . .