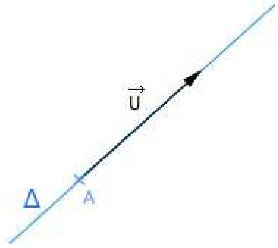
Chapitre 7 : Vecteurs, droites et plans de l'espace (Partie 2)

1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème

$M(x;y;z)$ appartient à la droite Δ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x &= \dots\dots\dots \\ y &= \dots\dots\dots \\ z &= \dots\dots\dots \end{cases}$$



Démonstration :

$M \in \Delta$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que ...., ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Définition

$\begin{cases} x &= at + x_A \\ y &= bt + y_A \\ z &= ct + z_A \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, est appelé ....

Remarques

— Il existe plusieurs représentations paramétriques pour une même droite : chaque représentation dépend ....
....

— Si on restreint $t \in \mathbb{R}^+$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont de même sens et on obtient alors une représentation paramétrique de
....

Exemple

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(0;1;2)$ et $B(-2;1;3)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix}$

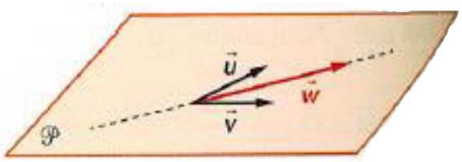
Soit $M(x;y;z)$, un point de la droite (AB). Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ car les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $overrightarrowAB$ sont colinéaires.

D'où le système : $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$ Donc une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$

2 Bases et repères de l'espace

Propriété

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont .... si, et seulement si, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.



Propriété

Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemple

Dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \overleftarrow{k})$, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$. Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Rappel : Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y, tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Ici, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On cherche donc x et y, réels tels que : $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Soit : $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$ Ou encore : $\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$

$l_1 + l_2$:

Dans l_1 :

Dans l_3 :

On a trouvé $x = \dots$ et $y = \dots$. Donc $\overrightarrow{AD} = \dots\overrightarrow{AB} + \dots\overrightarrow{AC}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont .... Par conséquents les points A, B, C et D sont ....

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace si et seulement si ces vecteurs ne sont pas coplanaires.

Exemple

Dans l'espace muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de l'espace ?

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. (car il n'existe pas de réels k tels que $\vec{v} = k\vec{u}$)

Supposons qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Alors :

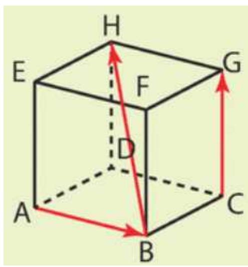
$$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Ainsi $\vec{w} = \dots\vec{u} + \dots\vec{v}$. Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ....

Par conséquent les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ....

Exemple

Dans un cube $ABCDEFGH$, démontrer que le triplet $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG}\right)$ est bien une base de l'espace.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$.

Considérons le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Dans ce repère les vecteurs ont pour coordonnées :

$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, ce qui donne en identifiant les coordonnées :

$\begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$ Donc ce système n'a pas de solution et les réels a et b n'existent pas.

Ainsi, il n'existe pas de réels a et b tels que $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$. Et donc les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas coplanaires.

Par conséquent, le triplet $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG}\right)$ est bien une ....