Chapitre 12 : Équation différentielle

Dans ce chapitre, a et b sont des réels et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Définition

L'équation différentielle (E_0) : $y' = ay$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = 0$, est appelé équation différentielle ....

Propriété

- Les solutions de (E_0) : $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par ....

Démonstration exigible :

(⇒) : Soient λ un réel et y une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{ax}$. Alors y est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit d'une constante par la composée d'une fonction affine et de la fonction exponentielle) et , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) =$ ....
Ainsi y est solution de (E_0).
(⇐) : Soient y une solution de (E_0) et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = y(x)e^{-ax}$.
Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

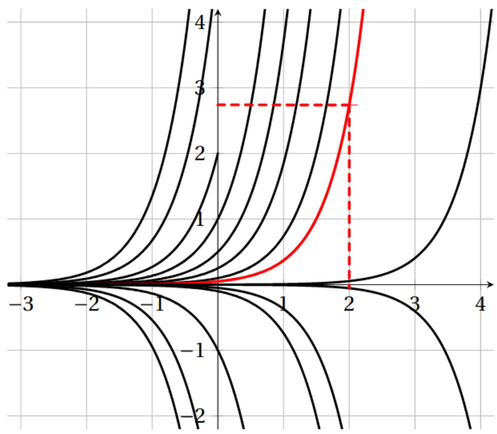
$g'(x)$ ....

Donc g est une fonction constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda$ soit $y(x)e^{-ax} = \lambda$.
En conclusion, $y(x) =$ .... ■

Exemple

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto$ .... , avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sont les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.

L'allure des courbes représentatives de certaines solutions de (E_0) est données ci-contre.



Propriété

Soient y_1 et y_2 des solutions de (E_0) : $y' = ay$ et soit k un réel.
La somme $y_1 + y_2$ et le produit ky_1 sont aussi des solutions de (E_0).

Démonstration :

$(y_1 + y_2)' =$ La fonction $y_1 + y_2$ est donc aussi une solution de (E_0).

$(ky_1)' =$ La fonction ky_1 est donc aussi une solution de (E_0).

Exemple

Résolvons l'équation différentielle (E_0) : $2y' + 3y = 0$ avec la condition initiale $y(2) = 1$.

(E_0) peut s'écrire $y' =$ .... donc les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto$ ....

Or $y(2) = 1 \iff$

La solution cherchée est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) =$ ....

2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay+b$, qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$, est appelée équation différentielle ....

Propriété

La fonction $x \mapsto$ .... est solution de l'équation différentielle (E). Cette solution est appelée solution particulière constante.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto$ .... où

- y_p est la solution particulière constante de l'équation (E) : $y' = ay + b$
- y_0 est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Propriété

Le solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto$ .... où λ est une constante réelle.

Exemple

Les solutions de $y' - 2y = 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) =$ ....

Exemple

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) : $2y' + 3y = 2$ telle que $y(2) = -\frac{1}{3}$.

1. On écrit (E) sous la forme $y' = ay + b$:
   $(E) \Longleftrightarrow y' =$ .... On reconnaît la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 1$. On en déduit que $-\frac{b}{a} =$ ....
2. On utilise la forme générale des solutions $x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
3. On calcule λ à l'aide de la condition initiale :
   $y(2) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$.

   La fonction y recherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) =$

3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ est également appelée équation différentielle ....
....

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto$ .... où

- y_p est la solution particulière constante de l'équation (E) : $y' = ay + b$
- y_0 est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$. on note φ une fonction affine qui est une solution particulière de (E). A l'aide de φ, résoudre (E).

On pose $\varphi(x) = mx + p$ (où m et p sont réels). En tant que fonction affine, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$.
φ est solution de (E) signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2m+3(mx+p) = 6x+1 \Longleftrightarrow 2m+3mx+3p = 6x+1 \Longleftrightarrow 3mx+2m+3p = 6x+1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3m & = 6 \\ 2m+3p & = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = \dots \\ p = \dots \end{array}\right.$$

Donc $\varphi : x \mapsto$ .... est une solution particulière de (E).

L'équation homogène associé à (E) est $2y' + 3y = 0$, soit $y' = -\frac{3}{2}y$, de solutions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :