Combinatoire et Dénombrement

A. OLLIVIER

Terminale

On dira qu'un ensemble E est . . . . . . lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le . . . . de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal 0.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal 0.
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

On dira qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.
Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal 0.
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple

On considère l'ensemble E des élèves de votre classe. Alors $Card(E) = \ldots$

Définition

On dit que deux ensembles sont . . . . s'ils ont aucun élément en commun.

Définition

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Définition

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_n)$

Définition

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_n)$

Exemple

Soit $E_1 = \{a; b; c; d\}$ *et* $E_2 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ *Alors* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ *(*E_1 *et* E_2 *sont disjoints) et on a :*
$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) =$

Définition

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_n)$

Exemple

Soit $E_1 = \{a; b; c; d\}$ *et* $E_2 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ *Alors* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ *(*E_1 *et* E_2 *sont disjoints) et on a :*
$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 =$

Définition

On dit que deux ensembles sont **disjoints** s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_n)$

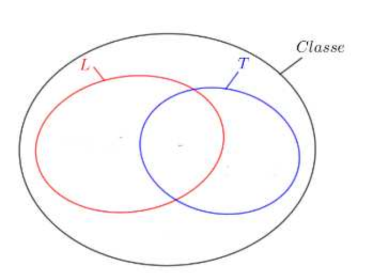
Exemple

Soit $E_1 = \{a; b; c; d\}$ *et* $E_2 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ *Alors* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ *(*E_1 *et* E_2 *sont disjoints) et on a :*
$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = \dots$
- $Card(T) = \dots$
- $Card(L \cap T) = \dots$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = \dots$

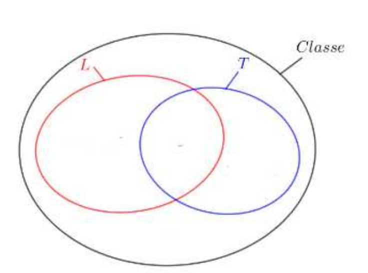


On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : ....

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = \dots$
- $Card(L \cap T) = \dots$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = \dots$



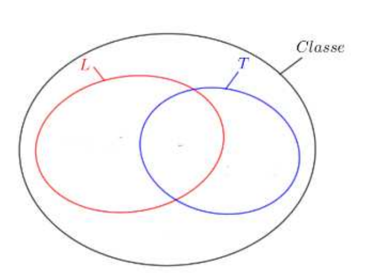
On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : ....
....

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = 14$
- $Card(L \cap T) = \ldots$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = \ldots$

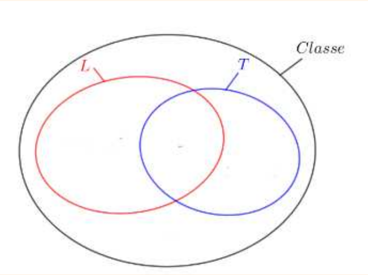
On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : ....



Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = 14$
- $Card(L \cap T) = 5$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = \ldots$

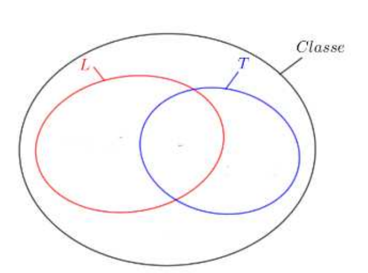


On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : ....
....

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = 14$
- $Card(L \cap T) = 5$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$



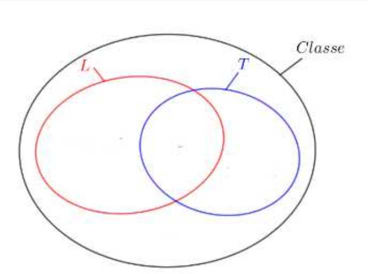
On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : ....
....

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme
Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = 14$
- $Card(L \cap T) = 5$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$

On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : 11 + 5 + 9 + 8 = 33



Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des ....
  (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des …… (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des **couples** (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **triplets** (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, $\ldots$, $a_p \in E_p$

Exemple

Soient $E = \{a; b; c\}$ *et* $F = \{1; 2\}$. *Alors :*

$$E \times F =$$

Exemple

Soient $E = \{a; b; c\}$ *et* $F = \{1; 2\}$. *Alors :*

$$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$$

$$F \times E =$$

Exemple

Soient $E = \{a; b; c\}$ *et* $F = \{1; 2\}$. *Alors :*

$$E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$$

$$F \times E = \{(1; a); (2; a); (1; b); (2; b); (1; c); (2; c)\}$$

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces.

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé.

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :
$(1, 2) \in E^2$,

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple : $(1,2) \in E^2$,$(6,3) \in E^2$,

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :
$(1,2) \in E^2$,$(6,3) \in E^2$,$(5,5) \in E^2$.

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple : $(1,2) \in E^2$,$(6,3) \in E^2$,$(5,5) \in E^2$. Il existe ... ... couples appartenant à E^2.

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple : $(1,2) \in E^2$,$(6,3) \in E^2$,$(5,5) \in E^2$. *Il existe* $6 \times 6 = 36$ *couples appartenant à* E^2.

Propriété

$Card(A \times B) =$

Propriété

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

Propriété

$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

Attention

Le signe $\times$ dans $Card(A \times B)$ désigne le produit cartésien des ensembles tandis que celui dans $Card(A) \times Card(B)$ désigne bien la multiplication de deux entiers.

Démonstration

Si $Card(A) = n$ et si $Card(B) = p$,

Démonstration

Si $Card(A) = n$ et si $Card(B) = p$, on peut représenter $A \times B$ sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, donc np cases.

Démonstration

Si $Card(A) = n$ et si $Card(B) = p$, on peut représenter $A \times B$ sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, donc np cases.

A \ B	b_1	b_2	$\dots$	b_p
a_1	$(a_1\,;b_1)$	$(a_1\,;b_2)$	$\dots$	$(a_1\,;b_p)$
a_2	$(a_2;b_1)$	$(a_2;b_2)$	$\dots$	$(a_2;b_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$(a_n;b_1)$	$(a_n;b_2)$	$\dots$	$(a_n;b_p)$

Démonstration

Si $Card(A) = n$ et si $Card(B) = p$, on peut représenter $A \times B$ sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, donc np cases.

A \ B	b_1	b_2	$\dots$	b_p
a_1	$(a_1; b_1)$	$(a_1; b_2)$	$\dots$	$(a_1; b_p)$
a_2	$(a_2; b_1)$	$(a_2; b_2)$	$\dots$	$(a_2; b_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$(a_n; b_1)$	$(a_n; b_2)$	$\dots$	$(a_n; b_p)$

Par conséquent $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) =$

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$,

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, c'est choisir d'abord un élément dans E_1 ($Card(E_1)$ possibilités),

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, c'est choisir d'abord un élément dans E_1 ($Card(E_1)$ possibilités), puis un élément de E_2 ($Card(E_2)$ possibilités)

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, c'est choisir d'abord un élément dans E_1 ($Card(E_1)$ possibilités), puis un élément de E_2 ($Card(E_2)$ possibilités)... et enfin un élément de E_p ($Card(E_p)$ possibilités)

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, c'est choisir d'abord un élément dans E_1 ($Card(E_1)$ possibilités), puis un élément de E_2 ($Card(E_2)$ possibilités)... et enfin un élément de E_p ($Card(E_p)$ possibilités) : d'où un total de $Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$ choix possibles.

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est ....

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*

b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) =$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) =$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$ *Il existe 24 menus différents.*

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$ *Il existe 24 menus différents.*
b) $Card(E \times P) =$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$ *Il existe 24 menus différents.*
b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) =$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$. *Il existe 24 menus différents.*

b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 =$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24.$ *Il existe 24 menus différents.*
b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12.$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*

b) *Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.
Alors $Card(E \times P \times D) = Card(E) \times Card(P) \times Card(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$. *Il existe 24 menus différents.*
b) $Card(E \times P) = Card(E) \times Card(P) = 3 \times 4 = 12$. *Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.*

Propriété

Soit un ensemble fini E à n éléments. Alors, on a : $Card(E^p) =$

Propriété

Soit un ensemble fini E à n éléments. Alors, on a : $Card(E^p) = n^p$.

Mais finalement, on additionne ou on multiplie ? En résumé :

Mais finalement, on additionne ou on multiplie ? En résumé :

"On a SOIT ceci, SOIT cela"

Mais finalement, on additionne ou on multiplie ? En résumé :

"On a SOIT ceci, SOIT cela" $\longrightarrow$ *ADDDITION*

Mais finalement, on additionne ou on multiplie ? En résumé :

"On a SOIT ceci, SOIT cela" $\longrightarrow$ *ADDDITION*

"On fait ceci, PUIS cela"

Mais finalement, on additionne
ou on multiplie ? En résumé :

"On a SOIT ceci, SOIT cela"	$\longrightarrow$	*ADDDITION*
"On fait ceci, PUIS cela"	$\longrightarrow$	*MULTIPLICATION*

Définition

On appelle . . . . le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! =$

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 =$

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $1! =$

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $1! = 1$
- $0! =$

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $1! = 1$
- $0! = 1$ *par convention*

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets* (b, o, a) *et* (r, a, p) *sont des arrangements à 3 éléments de* E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets* (b, o, a) *et* (r, a, p) *sont des arrangements à 3 éléments de* E. *Et* (p, a, r) *est un arrangement à 3 éléments de* E *différent de* (r, a, p).

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets* (b, o, a) *et* (r, a, p) *sont des arrangements à 3 éléments de* E. *Et* (p, a, r) *est un arrangement à 3 éléments de* E *différent de* (r, a, p). *L'ordre des éléments est à prendre en compte.*

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets* (b, o, a) *et* (r, a, p) *sont des arrangements à 3 éléments de* E. *Et* (p, a, r) *est un arrangement à 3 éléments de* E *différent de* (r, a, p). *L'ordre des éléments est à prendre en compte.*
- *Le quintuplet* (p, r, o, b, a) *est un arrangement à 5 éléments de* E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- *Les triplets* (b, o, a) *et* (r, a, p) *sont des arrangements à 3 éléments de* E. *Et* (p, a, r) *est un arrangement à 3 éléments de* E *différent de* (r, a, p). *L'ordre des éléments est à prendre en compte.*
- *Le quintuplet* (p, r, o, b, a) *est un arrangement à 5 éléments de* E.
- *Le sextuplet* (b, a, r, b, a, r) *n'est pas un arrangement de* E *car des éléments se répètent.*

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Un ... ... de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distinctes de E. (C'est à dire un liste de p éléments de E)

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distinctes de E. (C'est à dire un liste de p éléments de E)

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distinctes de E. (C'est à dire un liste de p éléments de E)

Remarque

Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe ... choix pour la 1 ère lettre.*

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe 5 choix pour la 1 ère lettre.*
- *La 1ère lettre étant fixée, il existe ... choix pour la 2ème lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.*

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe 5 choix pour la 1 ère lettre.*
- *La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2ème lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.*
- *Les deux premières lettres étant fixées, il existe ... choix pour la 3ème lettre*

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe 5 choix pour la 1 ère lettre.*
- *La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2ème lettre.*
  Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- *Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3ème lettre*

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à :

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe 5 choix pour la 1 ère lettre.*
- *La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2ème lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.*
- *Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3ème lettre*

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 =$

Exemple

On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- *Il existe 5 choix pour la 1 ère lettre.*
- *La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2ème lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.*
- *Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3ème lettre*

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :
$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Construire un arrangement de p éléments :

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Construire un arrangement de p éléments : c'est choisir un 1er élément dans E (n possibilités),

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Construire un arrangement de p éléments : c'est choisir un 1$^{\text{er}}$ élément dans E (n possibilités), puis un 2$^{\text{ème}}$ éléments distincts du 1$^{\text{er}}$ ($n-1$ possibilités)

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Construire un arrangement de p éléments : c'est choisir un 1^{er} élément dans E (n possibilités), puis un $2^{ème}$ éléments distincts du 1^{er} ($n-1$ possibilités) ... et enfin un $p^{ème}$ élément distinct des précédents ($n-p+1$ possibilités).

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Construire un arrangement de p éléments : c'est choisir un 1^{er} élément dans E (n possibilités), puis un $2^{\text{ème}}$ éléments distincts du 1^{er} ($n-1$ possibilités) ... et enfin un $p^{\text{ème}}$ élément distinct des précédents ($n-p+1$ possibilités). D'où ce total de $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments de E.

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remises dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse :

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remises dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\dfrac{52!}{(52-5)!} =$

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remises dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\dfrac{52!}{(52-5)!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ *et* $(5, 1, 2, 3, 4)$ *sont des permutations de* E

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ *et* $(5, 1, 2, 3, 4)$ *sont des permutations de* E *car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de* E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ *et* $(5, 1, 2, 3, 4)$ *sont des permutations de* E *car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de* E*.*

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ *et* $(5, 1, 2, 3, 4)$ *sont des permutations de* E *car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de* E*.*

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
Une .... de E est un arrangement à n éléments de E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ *et* $(5, 1, 2, 3, 4)$ *sont des permutations de* E *car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de* E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un arrangement à n éléments de E.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Il y a n façons de choisir le 1er élément,

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Il y a n façons de choisir le 1$^{\text{er}}$ élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le 2$^{\text{ème}}$,

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Il y a n façons de choisir le 1$^{\text{er}}$ élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le 2$^{\text{ème}}$, ...,

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Il y a n façons de choisir le 1$^{\text{er}}$ élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le 2$^{\text{ème}}$, ..., soit au total, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ façons.

Exemple

Il existe . . . . . . façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à $n!$.

Il y a n façons de choisir le 1er élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le 2ème, ..., soit au total, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ façons.

Exemple

Il existe $3! = 6$ *façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.*

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ *est appelée une combinaison de E à 3 éléments.*

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ *est appelée une combinaison de E à 3 éléments.*
Le sous-ensemble $\{2; 5\}$ *est appelée une combinaison de E à 2 éléments.*

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1;2;3;4;5\}$
Le sous-ensemble $\{1;2;3\}$ *est appelée une combinaison de E à 3 éléments.*
Le sous-ensemble $\{2;5\}$ *est appelée une combinaison de E à 2 éléments.*
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1;2\}$ *et* $\{2;1\}$ *correspondent à la même combinaison de* E.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ *est appelée une combinaison de* E *à 3 éléments.*
Le sous-ensemble $\{2; 5\}$ *est appelée une combinaison de* E *à 2 éléments.*
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1; 2\}$ *et* $\{2; 1\}$ *correspondent à la même combinaison de* E*.*

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Une ... ... de p éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1;2;3;4;5\}$
Le sous-ensemble $\{1;2;3\}$ *est appelée une combinaison de* E *à 3 éléments.*
Le sous-ensemble $\{2;5\}$ *est appelée une combinaison de* E *à 2 éléments.*
Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1;2\}$ *et* $\{2;1\}$ *correspondent à la même combinaison de* E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments.

On ne doit pas confondre . . . . et . . . .
.

On ne doit pas confondre **combinaison** et . . . .
.

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient :

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$.

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$,

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$, mais 6=3 ! arrangements : (a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$, mais 6=3 ! arrangements : (a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)
- A partir des 3 lettres a,b,d, on peut également former une seule combinaison, mais 6 arrangements.

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement.** Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$, mais 6=3 ! arrangements : (a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)
- A partir des 3 lettres a,b,d, on peut également former une seule combinaison, mais 6 arrangements.
- De même avec les 3 lettres a,c,d et les 3 lettres b,c,d.

Attention

On ne doit pas confondre **combinaison** et **arrangement**. Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$, mais 6=3 ! arrangements : (a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)
- A partir des 3 lettres a,b,d, on peut également former une seule combinaison, mais 6 arrangements.
- De même avec les 3 lettres a,c,d et les 3 lettres b,c,d.
- Ainsi, on a ici 4 combinaisons, mais 24 arrangements.

Combis de E à 3 elmts	Arrangements de E à 3 éléments					
$\{a, b, c\}$	(a, b, c)	(a, c, b)	(b, c, a)	(b, a, c)	(c, a, b)	(c, b, a)
$\{a, b, d\}$	(a, b, d)	(a, d, b)	(b, d, a)	(b, a, d)	(d, a, b)	(d, b, a)
$\{a, c, d\}$	(a, c, d)	(a, d, c)	(c, d, a)	(c, a, d)	(d, a, c)	(d, c, a)
$\{b, c, d\}$	(b, c, d)	(b, d, c)	(c, d, b)	(c, b, d)	(d, b, c)	(d, c, b)

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

.

Ce nombre se note . . . . . .

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

.

Ce nombre se note $\binom{n}{p}$

Exemple

- $\binom{n}{0} =$

Exemple

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} =$

Exemple

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} =$

Exemple

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{4}{3} =$

Exemple

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} =$

Exemple

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4$

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse :

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse : $\binom{52}{5}$

Le nombre $\binom{n}{p}$ de combinaisons de p parmi n porte également le nom de coefficient binomial en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{p}$. Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} =$

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :

Soit E un ensemble à n éléments.

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :

Soit E un ensemble à n éléments. A chaque sous-ensembles A de E à p éléments, on peut associer le sous-ensemble $\overline{A}$ à $(n-p)$ éléments.

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Démonstration :
Soit E un ensemble à n éléments. A chaque sous-ensembles A de E à p éléments, on peut associer le sous-ensemble $\overline{A}$ à $(n-p)$ éléments.
Il y a donc autant de sous-ensembles à p éléments que de sous-ensembles à $(n-p)$ éléments.

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} =$$

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1						
2						
3						
4						
5			$\dots$	$\dots$		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2						
3						
4						
5			...	...		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3						
4						
5			...	...		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2 +	1			
3						
4						
5			...	...		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2 +	1			
3	1	3	3	1		
4						
5			...	...		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2 +	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			...	...		

Démonstration exigible :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} =$$

Démonstration exigible :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

Démonstration exigible :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!}\end{aligned}$$

Démonstration exigible :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{n-p} + \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

Démonstration exigible :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{n-p} + \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{p+1} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right]
\end{aligned}$$

Démonstration exigible :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{n-p} + \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{p+1} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right] \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]$$
$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right]$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right]$$

$$= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right]$$
$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right]$$
$$= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}$$
$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right] \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right] \\
&= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}
$$

$n \backslash p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

n \ p	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Définition

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.
L'ensemble des parties de E est noté . . . .

Définition

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.
L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

- *$\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensemble.*

Définition

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.
L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

- $\mathcal{P}(E)$ *est donc un ensemble d'ensemble.*
- $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

Définition

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.
L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

- *$\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensemble.*
- $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple

Si $E = \{1; 2; 3\}$, alors : $\{1; 3\}$ et $\varnothing$ sont des parties de E.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E est égale à :

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E est égale à :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} =$$

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E est égale à :

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

Démonstration

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non.

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles.

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles.
- Le nombre de parties de E est égal à la somme des parties à 0 éléments, à 1 élément, à 2 éléments, à n éléments.

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles.
- Le nombre de parties de E est égal à la somme des parties à 0 éléments, à 1 élément, à 2 éléments, à n éléments. C'est à dire : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n}$.

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles.
- Le nombre de parties de E est égal à la somme des parties à 0 éléments, à 1 élément, à 2 éléments, à n éléments.
  C'est à dire : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \binom{n}{n}$.
- Ainsi $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\};$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\};\ \{2\};$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.

Alors

$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;$

Exemple

Soit $E = \{1;2;3\}$.

Alors

$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1;2\}\ ;$

Exemple

Soit $E = \{1;2;3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1;2\}\ ;\ \{1;3\}\ ;$

Exemple

Soit $E = \{1;2;3\}$.

Alors

$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1;2\}\ ;\ \{1;3\}\ ;\ \{2;3\}\ ;$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.

Alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1;2\}\ ;\ \{1;3\}\ ;\ \{2;3\}\ ;\ \{1;2;3\}$$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$

Exemple

Soit $E = \{1;2;3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{3\}\ ;\ \{1;2\}\ ;\ \{1;3\}\ ;\ \{2;3\}\ ;\ \{1;2;3\}\ \}$
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ *contient bien*

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}$
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ *contient bien 8 éléments,*

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.
Alors
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1;2\}; \{1;3\}; \{2;3\}; \{1;2;3\}\}$
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ *contient bien 8 éléments, donc le nombre de parties de* E *est bien égale à* 2^3.

Les situations classiques en dénombrement se distinguent selon que les éléments sont :

Les situations classiques en dénombrement se distinguent selon que les éléments sont :

- placés dans l’ordre ou non ;

Les situations classiques en dénombrement se distinguent selon que les éléments sont :

- placés dans l'ordre ou non ;
- répétés ou non (on dit aussi remplacées ou avec remise).

Les situations classiques en dénombrement se distinguent selon que les éléments sont :

- placés dans l'ordre ou non ;
- répétés ou non (on dit aussi remplacées ou avec remise).

En français	**En maths**
Successivement	AVEC ORDRE
Simultanément	SANS ORDRE
Avec remise	AVEC RÉPÉTITION
Sans remise	SANS RÉPÉTITION

	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$
Sans ordre		$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$