Chapitre 16 : Combinatoire et dénombrement

1 Notion de dénombrement sur un ensemble fini

On dira qu'un ensemble E est . . . . .lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de E est appelé le **cardinal** de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.

Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal 0.

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple

On considère l'ensemble E des élèves de votre classe. Alors $Card(E) = \ldots$

1.1 Principe additif

Définition

On dit que deux ensembles sont . . . . s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété

Soient E_1, E_2, ..., E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \ldots + Card(E_n)$

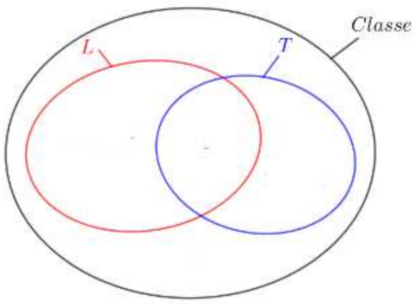
Exemple

Soit $E_1 = \{a; b; c; d\}$ et $E_2 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ Alors $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (E_1 et E_2 sont disjoints) et on a :

$Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 4 + 3 = 7$

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre. On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. Calculer le nombre d'élèves de cette classe.



Soit L l'ensemble des élèves pratiquant le latin et T l'ensemble des élèves pratiquant le théâtre. On a alors :

- $Card(L) = 16$
- $Card(T) = 14$
- $Card(L \cap T) = 5$
- $Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$

On en déduit que le nombre d'élèves de la classe est égale à : 11 + 5 + 9 + 8 = 33

1.2 Principe multiplicatif

Exemple

J'ai trois pantalons, quatre chemises et deux paires de chaussures. De combien de façon puis-je m'habiller ?

Définition

Soient p ensemble finis E_1, E_2, ..., E_p.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des . . . . (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des . . . . (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2, \ldots, a_p \in E_p$

Exemple

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Alors :

$E \times F = \{(a; 1) ; (a; 2) ; (b; 1) ; (b; 2) ; (c; 1) ; (c; 2)\}$

$F \times E = \{(1; a) ; (2; a) ; (1; b) ; (2; b) ; (1; c) ; (2; c)\}$

Remarque

Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble E sur lui-même, on note $E \times E = E^2$ et dans le cas général, E^p est le produit de p ensembles E.

Exemple

On lance deux dés à six faces. On note E l'ensemble des résultats possibles pour un dé. Alors E^2 est l'ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :

$(1,2) \in E^2$, $(6,3) \in E^2$, $(5,5) \in E^2$. Il existe .... couples appartenant à E^2.

Propriété

$Card(A \times B) = \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

Attention

Le signe $\times$ dans $Card(A \times B)$ désigne le produit cartésien des ensembles tandis que celui dans $Card(A) \times Card(B)$ désigne bien la multiplication de deux entiers.

Démonstration

Si $Card(A) = n$ et si $Card(B) = p$, on peut représenter $A \times B$ sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes, donc np cases.

Par conséquent $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

A \ B	b_1	b_2	$\ldots$	b_p
a_1	$(a_1;b_1)$	$(a_1;b_2)$	$\ldots$	$(a_1;b_p)$
a_2	$(a_2;b_1)$	$(a_2;b_2)$	$\ldots$	$(a_2;b_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	$(a_n;b_1)$	$(a_n;b_2)$	$\ldots$	$(a_n;b_p)$

Propriété

Soit p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p. Alors : $Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

Démonstration

Construire un élément quelconque de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$, c'est choisir d'abord un élément dans E_1 ($Card(E_1)$ possibilités), puis un élément de E_2 ($Card(E_2)$ possibilités) ... et enfin un élément de E_p ($Card(E_p)$ possibilités) : d'où un total de $Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_p)$ choix possibles.

Propriété

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est ....

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Propriété

Soit un ensemble fini E à n éléments. Alors, on a : $Card(E^p) = \ldots\ \ldots\ \ldots.$

Mais finalement, on additionne ou on multiplie ? En résumé :

"On a SOIT ceci, SOIT cela"	$\longrightarrow$	$ADDDITION$
"On fait ceci, PUIS cela"	$\longrightarrow$	$MULTIPLICATION$

2 Arrangements et permutations

2.1 La factorielle d'un nombre

Définition

On appelle **factorielle** n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n. Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Exemple

- $5! =$
- $1! =$
- $0! =$

2.2 Arrangements

Exemple
On considère l'ensemble $E = \{a; b; o; p; r\}$.

- Les triplets (b, o, a) et (r, a, p) sont des arrangements à 3 éléments de E. Et (p, a, r) est un arrangement à 3 éléments de E différent de (r, a, p). L'ordre des éléments est à prendre en compte.
- Le quintuplet (p, r, o, b, a) est un arrangement à 5 éléments de E.
- Le sextuplet (b, a, r, b, a, r) n'est pas un arrangement de E car des éléments se répètent.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Un arrangement de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distinctes de E. (C'est à dire un liste de p éléments de E)

Remarque
Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple
On prolonge l'exemple précédent pour calculer le nombre d'arrangements à 3 éléments de E.

- Il existe ...... choix pour la 1 ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe ...... choix pour la 2ème lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe ...... choix pour la 3ème lettre

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements à 3 éléments de E est égal à : ....

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

Construire un arrangement de p éléments : c'est choisir un 1^er^ élément dans E (n possibilités), puis un 2^ème^ éléments distincts du 1^er^ ($n-1$ possibilités) ... et enfin un $p^{\text{ème}}$ élément distinct des précédents ($n-p+1$ possibilités). D'où ce total de $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments de E.

Exemple
De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remises dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse :

2.3 Permutations

Exemple
On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Les quintuplets $(1, 3, 2, 5, 4)$ et $(5, 1, 2, 3, 4)$ sont des permutations de E car ce sont des p-uplets qui utilisent tous les éléments de E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Une .... de E est un arrangement à n éléments de E.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est égale à ...

Il y a n façons de choisir le 1^er^ élément, puis $(n-1)$ façons de choisir le 2^ème^, ..., soit au total, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ façons.

Exemple
Il existe .... façons différentes que 3 personnes s'assoient sur un banc à 3 places.

3 Combinaisons

3.1 Nombre de Combinaisons

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Le sous-ensemble $\{1; 2; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.

Le sous-ensemble $\{2; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.

Pour une combinaison, l'ordre n'a pas d'importance. Ainsi $\{1; 2\}$ et $\{2; 1\}$ correspondent à la même combinaison de E.

Définition

Soit E un ensemble à n éléments. Et $p \leq n$. Une .... de p éléments de E est un sous-ensemble de E de cardinal p.

Attention

On ne doit pas confondre .... et .... Un arrangement est une suite ordonnée de p éléments, c'est-à-dire que, contrairement aux combinaisons, l'ordre intervient : prenons l'exemple d'un ensemble E à 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche toutes les combinaisons et tous les arrangements à trois éléments :

- A partir des 3 lettres a,b,c, on ne peut former qu'une seule combinaison $\{a, b, c\}$, mais 6=3 ! arrangements : (a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, a, b), (c, b, a)
- A partir des 3 lettres a,b,d, on peut également former une seule combinaison, mais 6 arrangements.
- De même avec les 3 lettres a,c,d et les 3 lettres b,c,d.
- Ainsi, on a ici 4 combinaisons, mais 24 arrangements.

Combinaisons de E à 3 éléments	Arrangements de E à 3 éléments					
$\{a, b, c\}$	(a, b, c)	(a, c, b)	(b, c, a)	(b, a, c)	(c, a, b)	(c, b, a)
$\{a, b, d\}$	(a, b, d)	(a, d, b)	(b, d, a)	(b, a, d)	(d, a, b)	(d, b, a)
$\{a, c, d\}$	(a, c, d)	(a, d, c)	(c, d, a)	(c, a, d)	(d, a, c)	(d, c, a)
$\{b, c, d\}$	(b, c, d)	(b, d, c)	(c, d, b)	(c, b, d)	(d, b, c)	(d, c, b)

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

.

Ce nombre se note ....

Exemple

- $\binom{n}{0} =$
- $\binom{n}{n} =$
- $\binom{n}{1} =$
- $\binom{4}{3} =$

Exemple

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Réponse :

3.2 Coefficients binomiaux

Le nombre $\binom{n}{p}$ de combinaisons de p parmi n porte également le nom de coefficient binomial en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l'aide des coefficients $\binom{n}{p}$. Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Propriété

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$: $\dbinom{n}{n-p} =$

Démonstration :

Soit E un ensemble à n éléments. A chaque sous-ensembles A de E à p éléments, on peut associer le sous-ensemble $\overline{A}$ à $(n-p)$ éléments.

Il y a donc autant de sous-ensembles à p éléments que de sous-ensembles à $(n-p)$ éléments.

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2 + 1				
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			…	…		

Propriété (du triangle de Pascal)

Pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} =$$

Démonstration exigible :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{n-p} + \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\frac{1}{p+1} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right] \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right] \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(n-p)(p+1)}\right] \\
&= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

$n \backslash p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

$n \backslash p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

3.3 Parties d'un ensemble

Définition

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.
L'ensemble des parties de E est noté . . . .

Remarque

- *$\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensemble.*
- *$\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.*

Exemple

Si $E = \{1; 2; 3\}$, alors : $\{1; 3\}$ et $\varnothing$ sont des parties de E.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E est égale à :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} =$$

Démonstration

- Pour constituer une partie de E, il y a deux choix possibles pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou non. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles.
- Le nombre de parties de E est égal à la somme des parties à 0 éléments, à 1 élément, à 2 éléments, à n éléments.
  C'est à dire : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n}$.
- Ainsi $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

Exemple

Soit $E = \{1; 2; 3\}$.

Alors $\mathcal{P}(E) =$

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient bien . . . . . . éléments, donc le nombre de parties de E est bien égale à . . . .

4 Bilan des dénombrements

Les situations classiques en dénombrement se distinguent selon que les éléments sont :

- placés dans l'ordre ou non;
- répétés ou non (on dit aussi remplacées ou avec remise).

En français	**En maths**
Successivement	AVEC ORDRE
Simultanément	SANS ORDRE
Avec remise	AVEC RÉPÉTITION
Sans remise	SANS RÉPÉTITION

	AVEC RÉPÉTITION	SANS RÉPÉTITION
AVEC ORDRE	$\boldsymbol{n^p}$	$\boldsymbol{A_n^p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1)$
SANS ORDRE		$\boldsymbol{\binom{n}{p}} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$