Chapitre 10 : Valeurs intermédiaires et Convexité

1 Théorème des valeurs intermédiaires

Convention dans un tableau de variations :
Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

— la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant;
— la ....

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe ....
....
Autrement dit, f prend, entre a et b,
toute ....
....

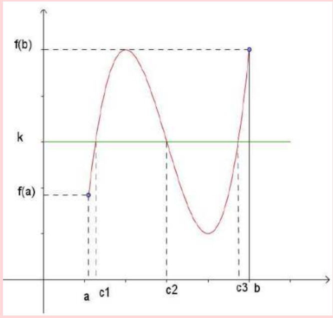


Illustration graphique

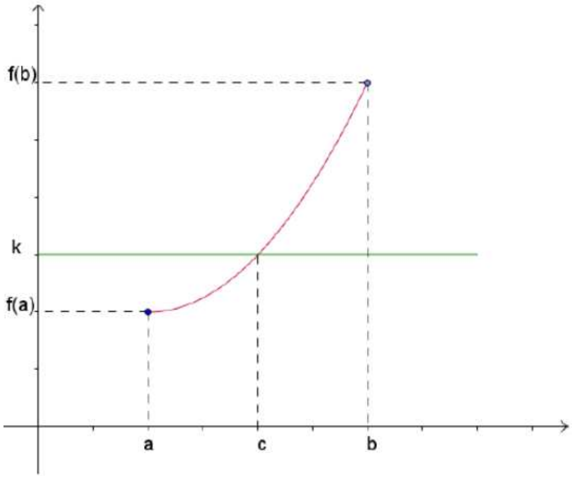
Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet ....
....

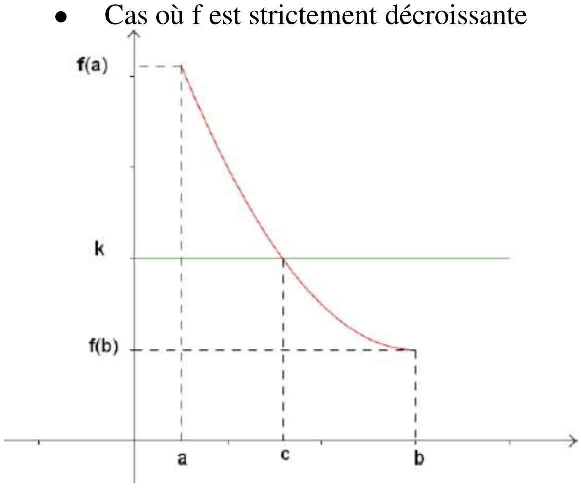
Remarque :
Ce corollaire s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.

Illustration graphique :

- Cas où f est strictement croissante



- Cas où f est strictement décroissante



Tableaux de variations :

2 Dérivée seconde d'une fonction

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est elle-même dérivable. La dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Exemple

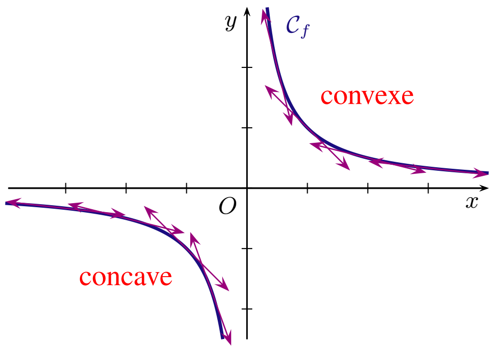
La fonction $f(x) = x^4$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dots\dots\dots$ et $f''(x) = \dots\dots\dots$.

3 Fonctions convexes

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

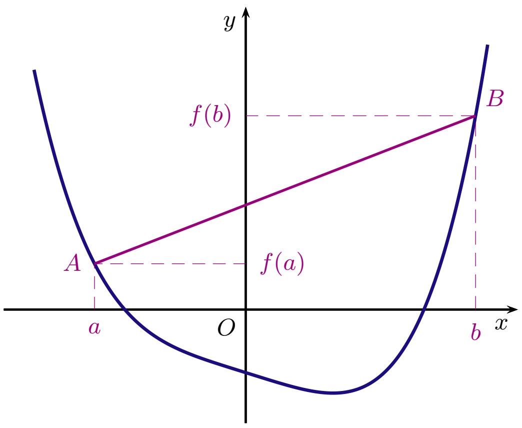
- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.



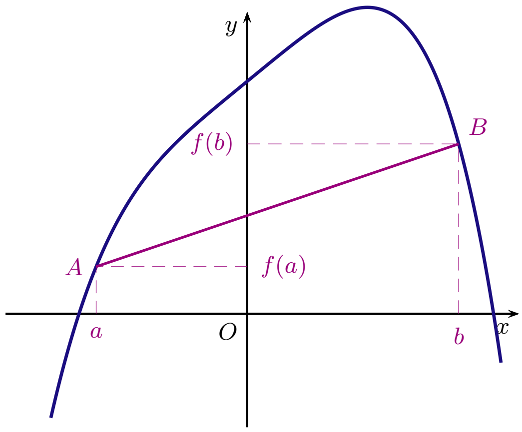
La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

Remarque

- f est convexe sur I lorsque sa courbe est située en-dessous de chacune de ses cordes entre deux points d'intersection.
- f est concave sur I lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses cordes entre deux points d'intersection.



f est convexe.



f est concave

Propriété

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est convexe sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes $\iff f'$ est .... sur $I \iff f''$ est .... sur I

Démonstration exigible :

Démontrons que f est **convexe** sur I, si f' est croissante sur I.
Considérons : φ la fonction définie sur I par : $\varphi(x) = f(x) - f'(a) \times (x - a) - f(a)$

Alors $\varphi'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Or f' est croissante sur I, donc φ' est également croissante sur I.
De plus, $\varphi'(a) = 0$. Donc φ' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variation ci-contre :

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	↘	$\dots$	↗

En effet : $\varphi(a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Donc $\varphi(x) \geq 0$ sur I. C'est à dire $f(x) \geq f'(a) \times (x - a) - f(a)$

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I. ■

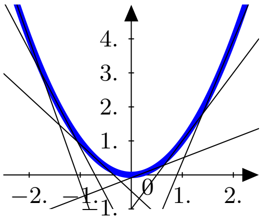
Méthode : Étudions la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

1. Calculons de la dérivée seconde : f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Étudions du signe de f'' : $f''(x) \geqslant 0 \iff 12x^2 \geqslant 0 \iff x \in \mathbb{R}$
3. Appliquons la propriété : f'' est positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

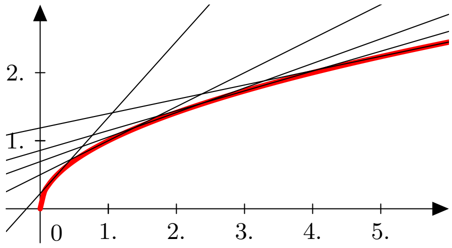
La fonction $f(x) = x^2$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = 2x$ et la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.



La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x réel strictement positif, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et la fonction g' est décroissante sur $]0; +\infty[$.



4 Point d'inflexion

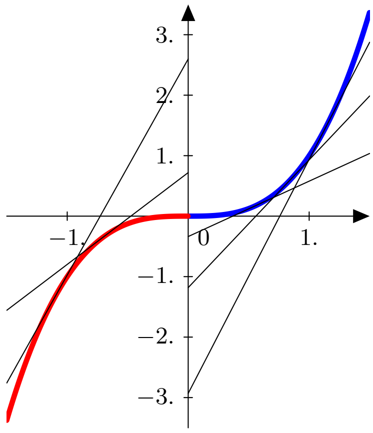
Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Soit $a \in I$. Dire que le point $A\,(a; f(a))$ est un $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ de $\mathcal{C}$ signifie qu'en A la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

Conséquence Soit l'abscisse a, f passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Exemple

La fonction $f(x) = x^3$ est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.
La fonction admet donc comme point d'inflexion l'origine du repère.



Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère et $a \in I$.
Le point $A\,(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Méthode :
Montrons que la fonction cube admet un point d'inflexion :

1. On vérifie que la fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle étudié : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme .
2. On calcul f'' : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$ et $f''(x) = \ldots\ldots\ldots$
3. Étude du signe de f'' : $f''(x) \geqslant 0 \iff 6x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$\cdots$	0	$\cdots$	

4. On conclue : la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0. On retrouve le fait que l'origine O du repère représente un point d'inflexion de la courbe de f.