Chap 18 : Loi des grands nombres

A. OLLIVIER

Terminale

Propriété

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Propriété

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Autrement dit : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ avec X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$

Propriété

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Autrement dit : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ avec X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$

Exemple

Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.
alors :

Propriété

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Autrement dit : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ avec X_1, X_2, $\ldots$, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$

Exemple

Si X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.
alors :
$X = X_1 + X_2 + X_3$ où X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $E(X) = \dots\dots$

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = \ldots\ldots$

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \ldots\ldots$

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = \dots$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$. Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = ...$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1 - p)$.

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1 - p)$.

• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.

• Or,

$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.

• Or,

$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1 - p)$.

- Or,

$$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$$

■

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1 - p)$.

• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$V(X) =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n)$$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p)$$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.

• Or,
$$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$$

■

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$$

■

• $\sigma(X) =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$$

■

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} =$

Démonstration exigible :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + ... + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
• Or,
$E(X) = E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = p + ... + p = np$
■

• Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n) = p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$$

■

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$ ■

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) =$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) =$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1-p)$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1 - p) = 20 \times 0,2 \times 0,8$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1 - p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1 - p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
- $\sigma(X) =$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3,2}$

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.

- $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
- $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3,2} = 1,789$

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.
On note X_1 la v.a. qui associe la masse, en grammes, de la pièce métallique obtenue lors du premier prélèvement,

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.
On note X_1 la v.a. qui associe la masse, en grammes, de la pièce métallique obtenue lors du premier prélèvement, X_2 la v.a. associant la masse de la pièce métallique du deuxième prélèvement

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.
On note X_1 la v.a. qui associe la masse, en grammes, de la pièce métallique obtenue lors du premier prélèvement, X_2 la v.a. associant la masse de la pièce métallique du deuxième prélèvement et ainsi de suite.

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.
On note X_1 la v.a. qui associe la masse, en grammes, de la pièce métallique obtenue lors du premier prélèvement, X_2 la v.a. associant la masse de la pièce métallique du deuxième prélèvement et ainsi de suite.
La liste (X_1, X_2, X_3) est constituée de trois v.a. identiques et indépendantes. Elles suivent la même loi : celle de X.

Définition

Une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivants toutes la même loi est appelée échantillon de taille n associée à cette loi (ou à une v.a. suivant cette loi).

Exemple

On prélève avec remise une pièce métallique dans une chaîne de production et on relève sa masse, en grammes.
Soit X la v.a. qui associe la masse de la pièce prélevée.
On note X_1 la v.a. qui associe la masse, en grammes, de la pièce métallique obtenue lors du premier prélèvement, X_2 la v.a. associant la masse de la pièce métallique du deuxième prélèvement et ainsi de suite.
La liste (X_1, X_2, X_3) est constituée de trois v.a. identiques et indépendantes. Elles suivent la même loi : celle de X.
La liste (X_1, X_2, X_3) est un échantillon de taille 3 de la loi de X.

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
- La **variable aléatoire moyenne** M_n de l'échantillon est donnée par : $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
- La **variable aléatoire moyenne** M_n de l'échantillon est donnée par : $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$

Exemple

Dans l'exemple précédent :

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
- La **variable aléatoire moyenne** M_n de l'échantillon est donnée par : $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$

Exemple

Dans l'exemple précédent :

- La variable aléatoire S_3 associe aux trois tirages la somme de la masse des trois pièces métalliques

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
- La **variable aléatoire moyenne** M_n de l'échantillon est donnée par : $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$

Exemple

Dans l'exemple précédent :

- La variable aléatoire S_3 associe aux trois tirages la somme de la masse des trois pièces métalliques
- La variable aléatoire M_3 associe la masse moyenne d'une pièce métallique d'un lot de trois pièces métalliques.

Définition

Soit une v.a. X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de v.a. indépendantes suivant une même loi que X.

- La **variable aléatoire somme** S_n de l'échantillon est donnée par : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$
- La **variable aléatoire moyenne** M_n de l'échantillon est donnée par : $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$

Exemple

Dans l'exemple précédent :

- La variable aléatoire S_3 associe aux trois tirages la somme de la masse des trois pièces métalliques
- La variable aléatoire M_3 associe la masse moyenne d'une pièce métallique d'un lot de trois pièces métalliques.

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

$$E(M_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \ldots\ldots$$

Propriété

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi que X.

$$E(S_n) = nE(X) \qquad V(S_n) = nV(X) \qquad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) =$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi.

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance.

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a :

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) =$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ∎

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ■

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ■

• $\sigma(S_n) =$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ■

• $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)}$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ■

• $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)}$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ∎

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ∎

• $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X)}$

Démonstration :

• La linéarité de l'espérance donne
$E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.
Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, $E(S_n) = nE(X)$ ■

• De même, les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ étant indépendantes, on a : $V(S_n) = V(X_1) + ... + V(X_n) = nV(X)$ ■

• $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X)} = \sqrt{n}\sigma(X)$ ■

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) =$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right)$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X)$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

$\blacksquare$

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

■

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) =$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

∎

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

$\blacksquare$

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n)$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

■

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X)$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

■

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ ■

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

■

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ ■

- $\sigma(M_n) =$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

$\blacksquare$

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ $\blacksquare$

- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)}$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

$\blacksquare$

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ $\blacksquare$

- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}}$

- La linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n)$$
$$E(M_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$$

■

- On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2 V(S_n)$

Donc $V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ ■

- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ ■

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$						

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$					

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$			

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Exemple

On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; ...; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :

  On a $E(X) = 5E(X_1)$.

  On a $E(X_1) =$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6}$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \dfrac{1}{6} + ... + 6 \times \dfrac{1}{6} = 3,5$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) =$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1)$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :

  On a $E(X) = 5E(X_1)$.

  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc

  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.

  Or $V(X_1) =$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
  Or $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
  Or $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
  Or $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$,
  d'où $V(X) =$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
  Or $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$,
  d'où $V(X) = 5 \times \frac{35}{12}$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Déterminons E(X) :
  On a $E(X) = 5E(X_1)$.
  On a $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5$. Donc
  $E(X) = 5E(X_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
- Déterminons V(X) :
  Les variables aléatoires $X_1; ...; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
  Or $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$,
  d'où $V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}$.

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Remarque

Cette inégalité signifie que la probabilité qu'une variable aléatoire X prenne une certaine valeur diminue d'autant plus que cette valeur est éloignée de l'espérance de X.

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.

Exemple

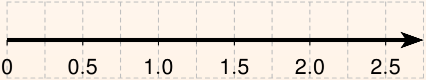
Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique

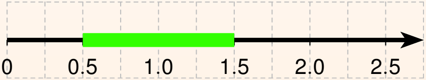
Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



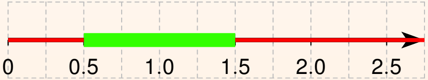
Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



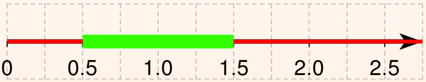
Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Exemple

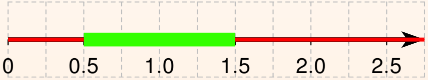
Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow$

Exemple

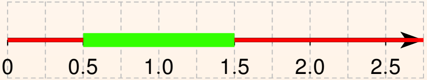
Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5; 1.5[\Leftrightarrow$

Exemple

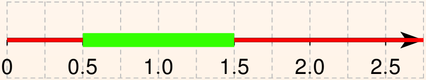
Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5; 1.5[\Leftrightarrow |X - 1| \geq 0.5$

Exemple

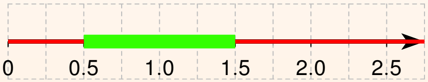
Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5; 1.5[\Leftrightarrow |X - 1| \geq 0.5$

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5;1.5[\Leftrightarrow |X-1| \geq 0.5$

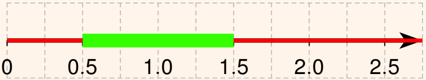
Ainsi, par l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.

Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.

Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



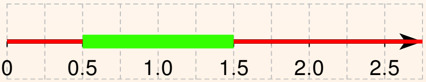
Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5; 1.5[\Leftrightarrow |X - 1| \geq 0.5$

Ainsi, par l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(|X - E(X)| \geq 0.5)$

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



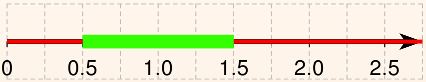
Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5;1.5[\Leftrightarrow |X-1| \geq 0.5$

Ainsi, par l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X-E(X)| \geq 0.5) \leq \frac{0.1}{0.5^2}$$

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.
Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5;1.5[$.
Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5;1.5[\Leftrightarrow |X-1| \geq 0.5$

Ainsi, par l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

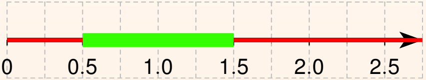
$P(|X-E(X)| \geq 0.5) \leq \dfrac{0.1}{0.5^2}$ soit $P(|X-1| \geq 0.5) \leq 0.4$.

Exemple

Le taux moyen de glycémie d'une personne est de $1 g.L^{-1}$ avec une variance de 0.1.

Une personne présente une taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0.5; 1.5[$.

Estimer la probabilité qu'une personne présente un taux critique



Le taux X est critique $\Leftrightarrow X \notin]0.5; 1.5[\Leftrightarrow |X - 1| \geq 0.5$

Ainsi, par l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq 0.5) \leq \frac{0.1}{0.5^2} \text{ soit } P(|X - 1| \geq 0.5) \leq 0.4.$$

La probabilité qu'une personne présente un taux critique est inférieure ou égale à 0.4.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) =$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) =$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$
  $\sigma(X) =$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$
  $\sigma(X) = \sqrt{1,8}$

  $P\left(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)\right) \leqslant$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$

  $\sigma(X) = \sqrt{1,8}$

  $$P\left(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)\right) \leqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$$

  Donc $P\left(|X - 2)| \geqslant 2\sqrt{1,8}\right) \leqslant$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$
  $\sigma(X) = \sqrt{1,8}$
  $$P\left(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)\right) \leqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$$
  Donc $P\left(|X - 2)| \geqslant 2\sqrt{1,8}\right) \leqslant 0,25$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

- $E(X) = 20 \times 0,1 = 2$ $\qquad V(X) = 20 \times 0,1 \times 0,9 = 1,8$
  $\sigma(X) = \sqrt{1,8}$
  $$P\left(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)\right) \leqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$$
  Donc $P\left(|X - 2)| \geqslant 2\sqrt{1,8}\right) \leqslant 0,25$

  La probabilité que l'écart de X à $E(X)$ soit supérieur à $2\sigma(X)$ est majorée par $0,25$.

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$:

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)\right) \leqslant$

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc

$$P\left(|X - 2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant$$

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc

$$P\left(|X - 2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant \frac{1}{9}$$

- pour $\delta = 4\sigma(X)$:

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc

  $$P\left(|X-2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant \frac{1}{9}$$
- pour $\delta = 4\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 4\sigma(X)\right) \leqslant$

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc
  $$P\left(|X-2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant \frac{1}{9}$$
- pour $\delta = 4\sigma(X)$: $P\left(|X - E(X)| \geqslant 4\sigma(X)\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{(4\sigma(X))^2}$ donc
  $$P\left(|X-2)| \geqslant 4\sqrt{1,8}\right) \leqslant$$

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc
  $$P\left(|X - 2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant \frac{1}{9}$$
- pour $\delta = 4\sigma(X)$: $P(|X - E(X)| \geqslant 4\sigma(X)) \leqslant \dfrac{V(X)}{(4\sigma(X))^2}$ donc
  $$P\left(|X - 2)| \geqslant 4\sqrt{1,8}\right) \leqslant 0,0625$$

Exemple

Soit une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(20, 0.1)$

- Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$ et $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
- pour $\delta = 3\sigma(X)$: $P(|X - E(X)| \geqslant 3\sigma(X)) \leqslant \dfrac{V(X)}{(3\sigma(X))^2}$ donc

  $$P\left(|X-2)| \geqslant 3\sqrt{1,8}\right) \leqslant \frac{1}{9}$$
- pour $\delta = 4\sigma(X)$: $P(|X - E(X)| \geqslant 4\sigma(X)) \leqslant \dfrac{V(X)}{(4\sigma(X))^2}$ donc

  $$P\left(|X-2)| \geqslant 4\sqrt{1,8}\right) \leqslant 0,0625$$
- On peut en déduire que les écarts de X à $E(X)$ de quelques σ deviennent improbables.

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant$$

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03; 0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geqslant 0,95$.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geqslant 0,95$.
Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration,

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geqslant 0,95$. Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaître l'espérance de X dans l'inégalité.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03; 0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geqslant 0,95$. Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaître l'espérance de X dans l'inégalité. Or $E(X) = p = 0,2$.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon. Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03 < M_n < 0,37) \geqslant 0,95$.
Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaître l'espérance de X dans l'inégalité. Or
$E(X) = p = 0,2$.
Ainsi, on cherche n tel que :

$$P(0,03 - 0,2 < M_n - 0,2 < 0,37 - 0,2) \quad \geqslant \quad 0,95$$

$$P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) \quad \geqslant \quad 0,95$$

$$\begin{aligned} P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95 \\ P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration,

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Or, $V(X) =$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta=0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\big(|M_n-E(X)|\geqslant\delta\big)\leqslant\dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Or, $V(X)=p(1-p)$

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Or, $V(X) = p(1-p) = 0,2 \times 0,8$

$$\begin{aligned}
P(0,03 - 0,2 < M_n - 0,2 < 0,37 - 0,2) &\geqslant 0,95 \\
P(-0,17 < M_n - 0,2 < 0,17) &\geqslant 0,95 \\
P(|M_n - 0,2| < 0,17) &\geqslant 0,95 \\
1 - P(|M_n - 0,2| > 0,17) &\geqslant 0,95 \\
P(|M_n - 0,2| > 0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Or, $V(X) = p(1-p) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

$$\begin{aligned} P(0,03-0,2 < M_n-0,2 < 0,37-0,2) &\geqslant 0,95 \\ P(-0,17 < M_n-0,2 < 0,17) &\geqslant 0,95 \\ P(|M_n-0,2| < 0,17) &\geqslant 0,95 \\ 1-P(|M_n-0,2| > 0,17) &\geqslant 0,95 \\ P(|M_n-0,2| > 0,17) &\leqslant 0,05 \end{aligned}$$

En prenant $\delta = 0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :
$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$.
Or, $V(X) = p(1-p) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$
On cherche un entier n tel que : $\dfrac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \Longleftrightarrow \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \Longleftrightarrow n \geq \frac{1}{0.05} \times \frac{0.16}{0.17^2}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq \frac{1}{0.05} \times \frac{0.16}{0.17^2}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq 110.7$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$
$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq \frac{1}{0.05} \times \frac{0.16}{0.17^2}$$
$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq 110.7$$

Pour $n \geqslant 111$,

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$
$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq \frac{1}{0.05} \times \frac{0.16}{0.17^2}$$
$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq 110.7$$

Pour $n \geqslant 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff \frac{n0.17^2}{0.16} \geq \frac{1}{0.05} \text{ (par inverse)}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq \frac{1}{0.05} \times \frac{0.16}{0.17^2}$$

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \iff n \geq 110.7$$

Pour $n \geqslant 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ est supérieur à $0,95$.

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) = 0$$

Propriété (Admise)

Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\big) = 0$$

Remarque

La loi des grands nombres illustre le fait que la moyenne de l'échantillon se rapproche de l'espérance des variables aléatoires quand la taille de l'échantillon "devient grande"

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?
D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette variable aléatoire.

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?
D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette variable aléatoire.
Ici la variable aléatoire X correspondant à cette expérience suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \dfrac{1}{13}$.

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?
D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette variable aléatoire.
Ici la variable aléatoire X correspondant à cette expérience suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \dfrac{1}{13}$.
Donc la limite de M_n est

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?
D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette variable aléatoire.
Ici la variable aléatoire X correspondant à cette expérience suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \dfrac{1}{13}$.
Donc la limite de M_n est $n \times p$

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes.
On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge t-elle ?
D'après la loi des grands nombres, M_n va tendre vers l'espérance de cette variable aléatoire.
Ici la variable aléatoire X correspondant à cette expérience suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \dfrac{1}{13}$.
Donc la limite de M_n est $n \times p = 1$.