T$^{\text{erm}}$ Spécialité Maths

Devoir surveillé

durée : 1h30

9 octobre 2023

Exercice 1 **4 points**

Déterminer les limites des suites suivantes en justifiant vos calculs :

1. $u_n = \frac{3n+1}{1+\frac{1}{n}}$ **2.** $v_n = n^3 - n^2 - 1$ **3.** $w_n = \frac{3n^2+2n+1}{n^2+3n+1}$ **4.** $z_n = \frac{\cos(n)}{n^2+1}$

Exercice 2 **6 points**

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius est supposée constante, et vaut 10 °C.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton en utilisant une suite.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2\,(T_n - 10)$$

.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.

- **a.** Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
- **c.** Conjecturer la limite de la suite (T_n) à l'aide de votre calculatrice.

4. On considère l'algorithme ci-contre :

- **a.** Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
  Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
- **b.** Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Tant que $T \geqslant 40$
    $T \leftarrow 0,8T + 2$
    $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

Exercice 3 **5 points**

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2-2x}$.

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation complet de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 4 **4 points**

A l'aide du graphique ci-contre, déterminer :

1. les limites à droites et à gauche de f quand x tend vers -3 et 3.

2. les limites quand x tend vers 0, vers $+\infty$ et vers $-\infty$.