EQUATIONS DE DROITES ET SYSTEMES

I) Equations de droites

1) Vecteur directeur

Définition : un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur $\vec{u}$ non nul dont la direction est celle de $\mathscr{D}$.

Remarques :
① Soit A et B deux points de la droite $\mathscr{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
② Une droite $\mathscr{D}$ est donc connue dès qu'on en connaît un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Pour tracer la droite, on part du point A, où l'on place le vecteur $\vec{u}$ et on obtient au bout du vecteur un autre point B de la droite $\mathscr{D}$…
On dit que $\mathscr{D}$ est définie par A et $\vec{u}$.

2) Equations de droites

On considère le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

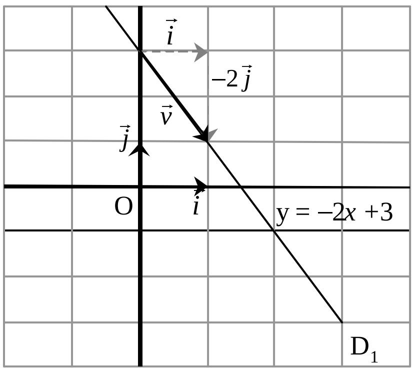
Théorème :
• Toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme y = a x + b où a et b sont deux nombres réels.
• Toute droite $\mathscr{D}$' parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme x = c où c est un nombre réel.

Remarques :
① Dans un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.
② Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ou dite « verticale » ne représente aucune fonction.

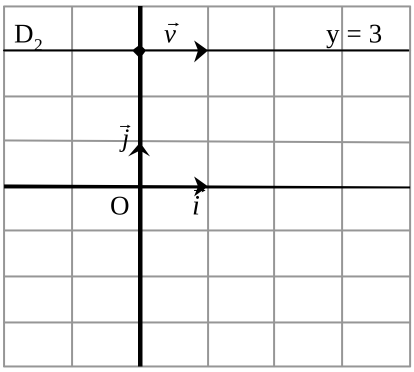
Théorème : Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; a) est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = a x + b.

Remarque : Soit $\mathscr{D}$ une droite définie par un point A et son coefficient directeur a. Pour tracer la droite $\mathscr{D}$: on place le point A , à partir de A, on trace le vecteur directeur $\vec{u} = 1\vec{i} + a\vec{j}$ (c'est la marche d'escalier cf cours Fonctions affines) et on obtient un autre point B de la droite $\mathscr{D}$…

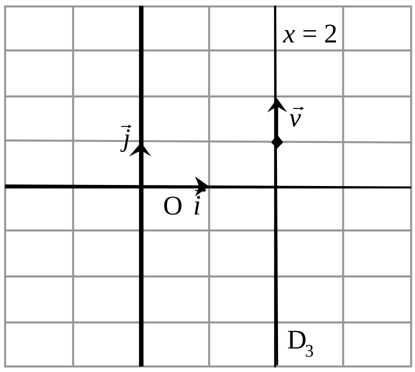
Exemples :



D_1 a pour équation y = −2x + 3.
Elle représente la fonction affine $x \mapsto -2x+3$.
Coefficient directeur a = −2.
Vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$.



D_2 a pour équation y = 3.
Elle représente la fonction affine constante $x \mapsto 3$.
Coefficient directeur a = 0.
Vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i}$.
D_2 est parallèle à l'axe des abscisses.



D_3 a pour équation x = 2. Elle ne représente aucune fonction affine.

Pas de coefficient directeur.
Vecteur directeur $\vec{u} = \vec{j}$
D_3 est parallèle à l'axe des ordonnées.

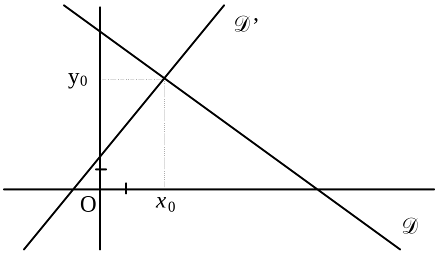
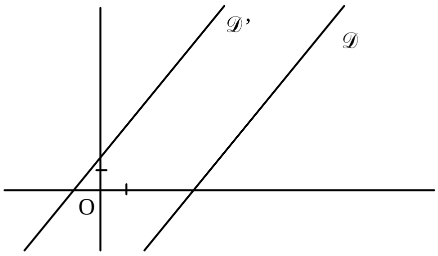
3) Parallélisme de deux droites

Théorème : Soit deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives y = a x + b et y = a' x + b'.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs a et a' sont égaux.

II) Système de deux équations à deux inconnues

Résoudre le système $\begin{cases} rx+sy=t \\ r'x+s'y=t' \end{cases}$, d'inconnues x et y, c'est chercher les valeurs de x et y qui vérifient **à la fois** les deux équations.
Si le couple (x_0 ; y_0) vérifie à la fois les deux équations, on dit que le couple (x_0 ; y_0) est une solution de ce système.

En exprimant y en fonction de x dans les deux équations, nous obtenons des équations de droites du type y = a x + b. On considère $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les deux droites associées au système.

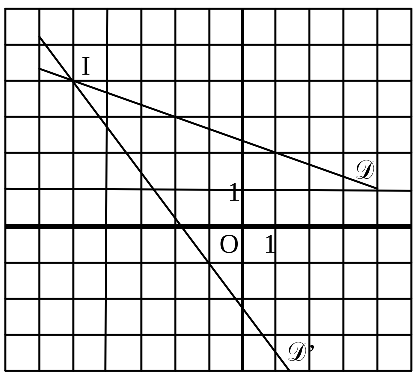
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.  	Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles.  	Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues.
Le système a un couple solution (x_0 ; y_0) qui sont les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.	Les deux équations sont incompatibles. Le système n'a pas de solution.	Les deux équations sont identiques. Le système a une infinité de couples solutions.

Exemple : Soit le système $\begin{cases} 5x+4y=-9 \\ x+3y=7 \end{cases}$. En exprimant y en fonction de x dans les deux équations, nous obtenons les équations de droites suivantes :

$$\begin{cases} 4y=-5x-9 \\ 3y=-x+7 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y=\dfrac{-5x-9}{4} \\ y=\dfrac{-x+7}{3} \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} y=-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{9}{4} \\ y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

Traçons dans un repère les droites $\mathscr{D}$ d'équation $y=-\dfrac{5}{4}x-\dfrac{9}{4}$ et

$\mathscr{D}'$ d'équation $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$.



Le point d'intersection I de coordonnées (–5 ; 4) vérifient à la fois les deux équations. Comme les droites sont sécantes (coefficients directeurs différents), il n'y a qu'une solution, le couple (–5 ; 4).

III) Méthodes de résolution

1) Méthode par substitution

Soit le système $\begin{cases} 5x+4y=-9 \\ x+3y=7 \end{cases}$. Ce système a une équation simple, la 2ème dans laquelle x a comme coefficient 1.

- Dans la 2ème équation, on exprime x en fonction de y : $x=-3y+7$.

- Dans l'autre équation (la 1ère), on remplace (substitue) x par $-3y+7$:

d'où le système $\begin{cases} 5(-3y+7)+4y=-9 \\ x=-3y+7 \end{cases}$.

- On détermine y dans la 1ère équation (en développant) :

d'où le système $\begin{cases} -15y+35+4y=-9 \\ x=-3y+7 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} -11y=-9-35 \\ x=-3y+7 \end{cases}$, soit $\begin{cases} -11y=-44 \\ x=-3y+7 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} y=\dfrac{-44}{-11}=4 \\ x=-3y+7 \end{cases}$.

- On remplace y par sa valeur dans l'autre équation pour trouver x :

$\begin{cases} y=4 \\ x=-3\times4+7 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} y=4 \\ x=-12+5=-5 \end{cases}$.

- On conclut : le système une solution unique, le couple (–5 ; 4).

2) Méthode par addition (ou combinaison)

Soit le système $\begin{cases} 3x-4y=18 \quad (L_1) \\ 5x+2y=17 \quad (L_2) \end{cases}$. Ce système n'a pas d'équation simple où une inconnue a comme coefficient 1.

- On cherche une combinaison des lignes L_1 et L_2 qui permet ensuite par addition d'éliminer une des inconnues : choisissons d'éliminer x en multipliant L_1 par 5 et L_2 par –3 :

d'où le système $\begin{cases} 3x-4y=18 & \times\ 5 \\ 5x+2y=17 & \times(-3) \end{cases}$ devient $\begin{cases} 15x-20y=90 \\ -15x-6y=-51 \end{cases}$.

- On additionne les deux lignes et on obtient : $\begin{array}{l} \begin{cases} 15x-20y=90 \\ -15x-6y=-51 \end{cases} \\ \hline \quad 0x-26y=39 \end{array}$, d'où $y=-\dfrac{39}{26}=-\dfrac{3}{2}$.

- On remplace y par sa valeur dans l'une des deux équations (la plus simple) :

d'où le système $\begin{cases} 3x-4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=18 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} 3x+6=18 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} 3x=12 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x=\dfrac{12}{3}=4 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

- On conclut : le système une solution unique, le couple $\left(4;-\dfrac{3}{2}\right)$.