Chapitre 4 : Courbe paramétrée

1 Définitions

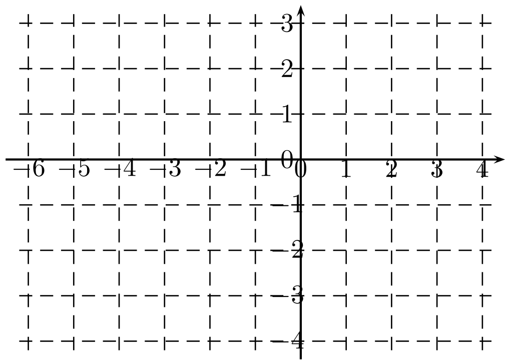
Définition

Soient deux fonctions f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit F sur I par : $F : t \mapsto (f(t); g(t))$.
On dit que F est une . . . .
Les fonctions f et g sont appelées les . . . .

Définition

On considère F par $F : t \mapsto (f(t), g(t))$. Pour un $t \in I$, on peut associer un point $M(f(t); g(t))$.
On dit que t est le . . . .
Quand t parcourt I, M décrit une courbe du plan que l'on appelle . . . .
Elle représente également . . . .

Exemple
Tracer la courbe représentant le système paramétrique : $\begin{cases} x(t) &= t^2 - 4t - 2 \\ y(t) &= t - 3 \end{cases}$



t	-1	0	1	2	3	4	5
$f(t)$							
$g(t)$							

2 Tableau combiné de variation

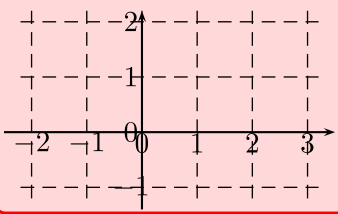
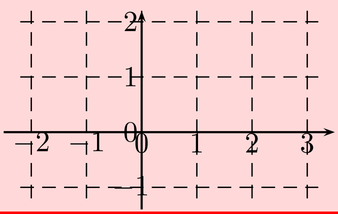
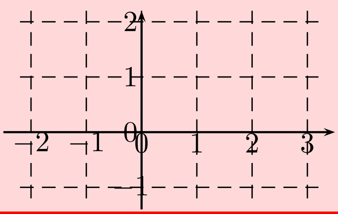
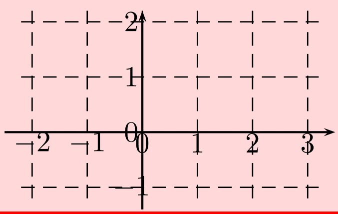
On considère la représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) &= f(t) \\ y(t) &= g(t) \end{cases}$ pour $t \in I$
Pour obtenir la trajectoire de $M(f(t); g(t))$, on doit comprendre comment **évolue** f et g sur I.

Pour cela, on va étudier les variations de f et g sur I dans un même tableau :

t	
$f'(t)$	
$f(t)$	
$g(t)$	
$g'(t)$	

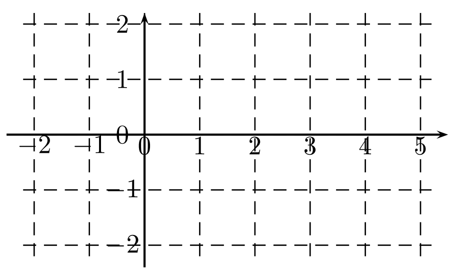
Propriété

- Si f croit et g décroît alors le point $M(f(t); g(t))$ se déplace . . . .
- Si f croit et g décroît alors le point $M(f(t); g(t))$ se déplace . . . .
- Si f croit et g décroît alors le point $M(f(t); g(t))$ se déplace . . . .
- Si f croit et g décroît alors le point $M(f(t); g(t))$ se déplace . . . .

Exemple
Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(y); y(t))$ dont le tableau de variation conjoint est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
$x(t)$	4	↘	1	↘	0	↗	1	↗	4
$y(t)$	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9



3 Dérivées et tangentes

Définition

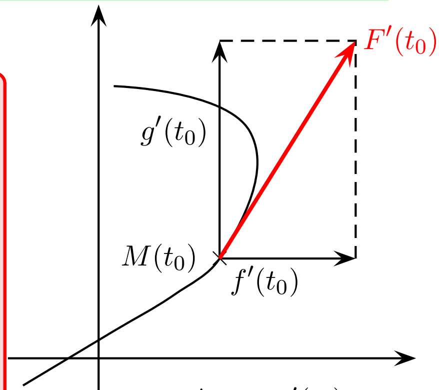
La fonction F est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions f et g sont dérivables en t_0 et alors, le vecteur

$F' : t_0 \mapsto \big(f'(t_0)\,;\,g'(t_0)\big)$ est appelé vecteur dérivé au point $M(t_0)$

Propriété

Le vecteur dérivé $\big(f'(t_0)\,;\,g'(t_0)\big)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ (qui a pour coordonnées $(f(t_0); g(t_0))$).

- Si $f'(t_0) \neq 0$, $m = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$ est le coefficient directeur de la tangente en $M(t_0)$.
- Si $g'(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ est ....
- Si $f'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ est ....



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

Exemple complet d'étude d'une courbe paramétrée

On cherche à étudier et tracer la courbe définie paramétriquement par $\begin{cases} x &= f(t) &= -6t^3 + 6t^2 \\ y &= g(t) &= -6t^2 + 6t \end{cases}$, pour $t \in [0.1]$.

1. Etude des variations de f et g :
   Pour tout $t \in I = [0.1]$,

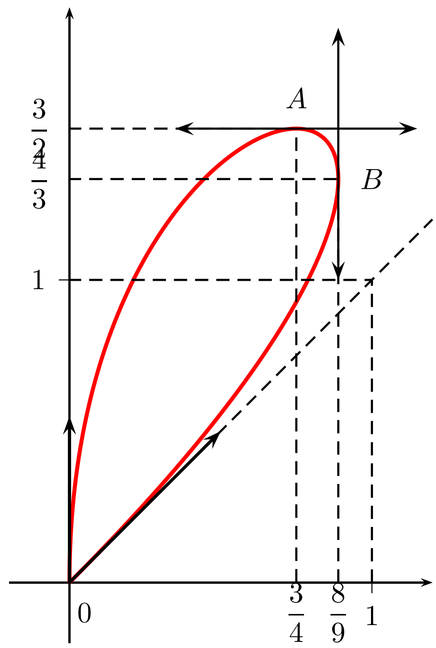
   $$\begin{cases} f'(t) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g'(t) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

   On peut alors dresser le tableau des variations de f et g :

t	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$	0	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	-6
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{8}{9}$	$\searrow$	0
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0
$g'(t)$	6	$+$	0	$-$	-2	$-$	-6

2. Etude des points remarquables de la courbe.
   Il y a 3 points remarquables (O est un point double) :

   - Pour $t = 0$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0$: la tangente au point $(0\,;\,0)$ est ....
   - Pour $t = \dfrac{1}{2}$, $g'(t) = 0$ et $f'(t) \neq 0$: la tangente au point $A\left(\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ est ....
   - Pour $t = \dfrac{2}{3}$, $f'(t) = 0$ et $g'(t) \neq 0$: la tangente au point $B\left(\dfrac{8}{9}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ est ....
   - Pour $t = 1$, $m = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = 1$: la tangente au point $(0\,;\,0)$ a pour coefficient directeur $m = 1$.



Exemple

Étudier la courbe paramétrique $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x &= f(t) &= 2t^3 - 3t^2 \\ y &= g(t) &= 4t - t^2 \end{cases}$ sur $[-1; 5]$