Chapitre 3 : Équation différentielle d'ordre 1

1 Introduction

Objectif : On veut résoudre l'équation suivante, d'inconnue y :

$$(E):\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t) \qquad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des fonctions de } t.$$

Ici, $y(t)$ est aussi une fonction, et donc $y'(t)$ est sa dérivée. On appelle cette équation : équation différentielle que l'on écrit en abrégé : $(E):\quad a(t)y'+b(t)y=c(t)$ ou encore $(E):\quad ay'+by=c$

La (ou les) solution(s) de l'équation seront donc des fonctions de t.

Remarque : on dit que l'équation différentielle est du premier ordre car y n'est dérivée qu'une seule fois : y'.

2 Équation différentielle homogène

Définition

On appelle équation différentielle homogène ou sans second membre une équation du type :

$$(E_0):\quad a(t)y'+b(t)y=0$$

2.1 Avec des coefficients constants

On considère l'équation différentielle : $(E_0):\quad ay'+by=0$, où a et b sont des constantes.

Propriété

La solution générale de l'équation $(E_0):\quad ay'+by=0$ est la fonction $y_0(t)=ke^{-\frac{b}{a}t}$, où $k\in\mathbb{R}$.

Remarque
La valeur k se détermine dès que sont connues les conditions initiales : si pour t_0 on a $y(t_0)=y_0$ alors $k=y_0e^{\frac{b}{a}t_0}$

2.2 Avec des coefficients non constants

Dans le cas général, l'équation différentielle linéaire homogène s'écrit :
$(E_0):\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$ où a et b sont des fonctions de t.

Propriété

La solution générale de l'équation $(E_0):\quad a(t)y'+b(t)y=0)$ est la fonction

$$y_0(t)=ke^{F(t)}$$

où $k\in\mathbb{R}$ et F est une primitive de la fonction $t\mapsto -\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3 Équation différentielle avec second membre

On considère l'équation différentielle : $(E):\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t)$ où a, b et c sont des fonctions de t.

On appelle équation homogène associée (ou équation sans second membre associée) à (E) l'équation :

$$(E_0):\quad a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0$$

Propriété

La solution générale $g(t)$ de l'équation (E) est obtenue en ajoutant une solution particulière y_p (donnée ou à trouver), avec la solution générale y_0 de l'équation homogène associée (E_0).

$$g(t)=y_p(t)+y_0(t)$$