Chapitre 2 : Intégration

1 Equation différentielle

1.1 Définition d'une équation différentielle

Définition

Une .... est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple

- L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
  Dans ce cas, une solution de l'équation est $y = \ldots\ldots$. En effet $(\ldots\ldots)' = 5$.
- Un solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = \ldots\ldots\ldots$.
  $y = \ldots\ldots$ est une autre solution de l'équation différentielle. En effet, $(\ldots\ldots\ldots)' = 2x$.

1.2 Équation différentielle du type $y' = f$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \dfrac{1}{x}$ car :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 2x + \frac{1}{x} \\ &= 6x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2 Primitive d'une fonction

Exemple

On considère les fonctions suivantes : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$ et $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+3x-1 \end{array}$. On constate que $F'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

F est donc solution de l'équation différentielle : $y' = f$. On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I si ....
....

" F est une primitive de f sur I " a le même sens que ....

Exemple

- $f(x) = 2$ a pour primitive $F(x) = \ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.
- $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ a pour primitive $G(x) = \ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$.

Détermination des primitives d'une fonction

On cherche dans le tableau des dérivées usuelles en le lisant de droite à gauche et on utilise les résultats suivants :
- si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- si F est une primitive de f sur I et si k est un nombre réel quelconque alors kF est une primitive de kf sur I.

Primitives des fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions f suivantes, la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I donné :

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty ; 0[$ ou $I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$I =]-\infty ; 0[$ ou $I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$I =]0 : +\infty[$	....
$f(x) = \cos x$	$I = \mathbb{R}$	....
$f(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$	....

Fonctions composées :

Fonction $f(x)$	**Primitives** $F(x)$	**Exemples**
$f = (u + v)$		$\int (x^2 + e^x) =$
$f = k \times u$		$\int \left(\dfrac{5}{x}\right) =$
$f = \left(\dfrac{u'}{\sqrt{u}}\right)$		$\int \left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-2}}\right) =$
$f = (u'e^u)$		$\int \left(-2xe^{-x^2}\right) =$
$f = \left(\dfrac{u'}{u}\right)$		$\int \left(\dfrac{2x^3 - e^x}{0,5x^4 - e^x}\right) =$
$f = (u'u^n)$		$\int (2x(x^2-3)^3) =$
$f = \left(\dfrac{u'}{u^n}\right)$		$\int \left(\dfrac{3x^2}{(x^3-7)^4}\right) =$
$f = \cos(ax + b)$		$\int (\cos(3x - 1)) =$
$f = \sin(ax + b)$		$\int (\sin(3 - 7x)) =$

3 Intégrale

3.1 Calcul

Définition

On appelle **intégrale de f sur** $[\,a\,;\,b\,]$ le nombre réel $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Exemple
Calcul de l'intégrale : $\int_2^3 x\,dx$:

- Une primitive de $f(x)=x$ est $F(x)=\ldots\ldots$.
- donc, $\int_2^3 x\,dx = F(3)-F(2)=\ldots\ldots\ldots$

Remarque

— *L'intégrale d'une fonction f sur $[\,a\,;\,b\,]$ est indépendante du choix de la primitive F.*

— *On note aussi $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.*

— *Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x est « muette », ce qui signifie que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$*
Le dx ou dt détermine la variable par rapport à laquelle on intègre la fonction : x, ou t.

3.2 Interprétation graphique

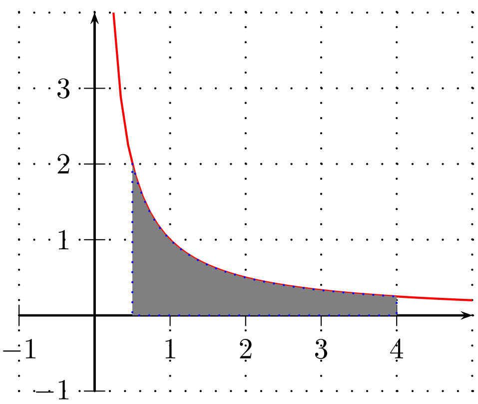
Propriété

Si f est une fonction positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ exprimée en unité d'aire.

Exemple
Calcul de l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $\frac{1}{x}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=4$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ d'unité graphique 1 cm :

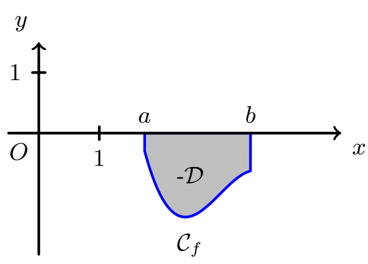
$$\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{x}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{x}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

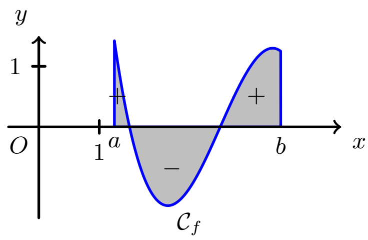


Remarque
On étend la notion d'intégrale pour une fonction non positive :

∗ Si f est une fonction continue et négative sur $[a;b]$,
on appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et on note $\int_a^b f(t)dt = -aire(\mathcal{D})$.



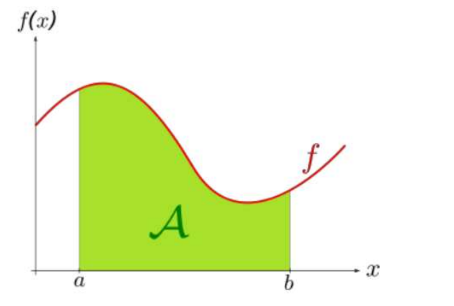
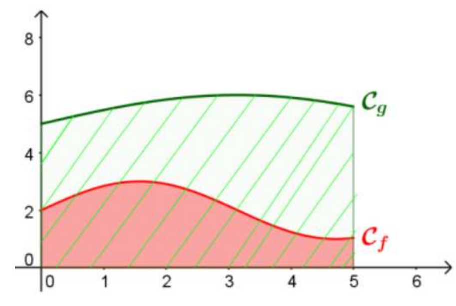
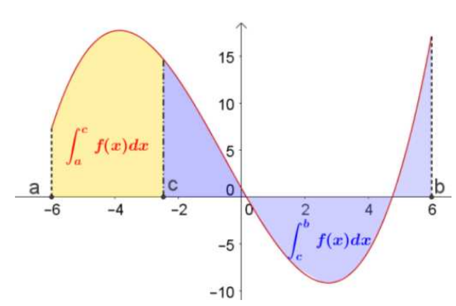
∗ Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$,
on appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence entre l'aire obtenue quand f est positive et l'aire obtenue quand f est négative.



3.3 Propriétés

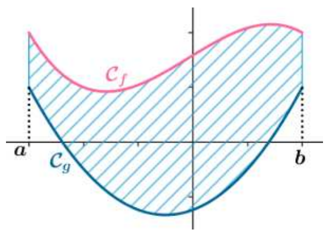
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c des éléments de I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité		**Bornes de l'intégrale**	
$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x =$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x =$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \dots$	$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x =$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Positivité	**Relation d'ordre**	**Relation de Chasles**
Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \dots\dots$	Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \dots\dots$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
		

4 Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.



Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

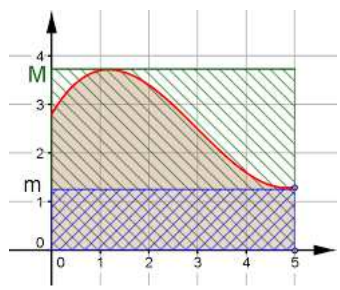
5 Valeur moyenne

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Si $a \leq b$ et si m et M sont deux réels tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et si $a < b$, $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$



Définition

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$