FONCTIONS

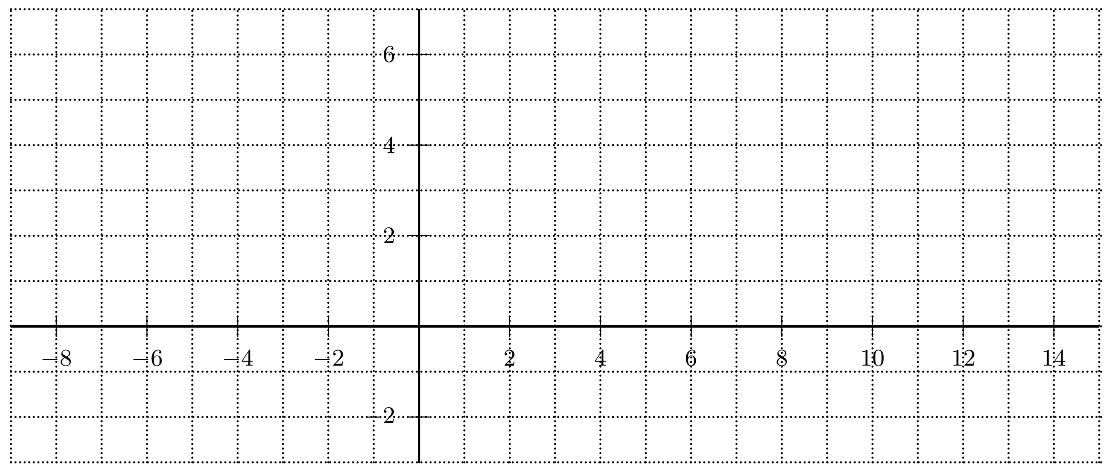
Table des matières

I Fonctions usuelles

I.1 Fonctions en escalier

Définition 1
Une fonction en escalier est une fonction ....

Exemple 1
La fonction définie sur $[-8\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad -8 \leq x < -2 \\ 6 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 \leq x \end{cases}$ est une fonction en escalier.



I.2 Fonctions affines

Définition 2
a et b sont deux réels donnés. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée ....
- ➤ *Le réel a est* ....
- ➤ *Le réel b est* ....

Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) =$....... D'où les tableaux de variation suivants :

$a > 0$

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	
signe de f	

$a < 0$

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	
signe de f	

Propriété 1
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Pour tout réels x_1, x_2 tels que $x_1 \neq x_2$, $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Exemple 2
Le graphique ci-contre représente les droites d'équation :

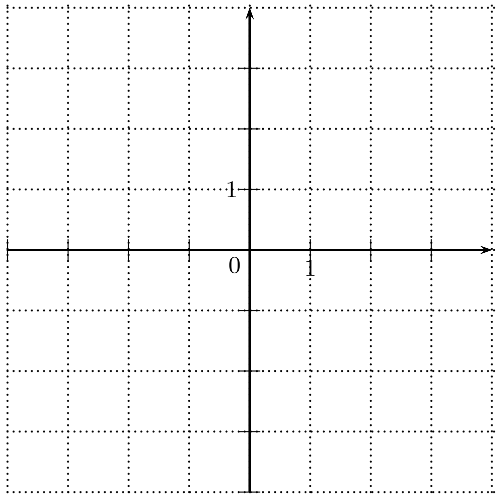
$d_1 : y = x + 1$

$d_2 : y = 2$

$d_3 : y = -3x - 2$

$d_4 : x = -1$

$d_5 : y = \frac{3}{4}x - 3$



I.3 Fonction du second degré

Définition 3
On appelle fonction <u>*polynôme du second degré*</u> *toute fonction* P *de la forme*

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b *et* c *sont des réels avec* $a \neq 0$
L'expression $ax^2 + bx + c$ *est appelée* <u>*trinôme du second degré*</u>

Exemple 3
- ➔ $P(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$
- ➔ $P(x) = 4x^2$, on a : $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$
- ➔ $2x + 1$, $6x^3 + 4x + 2$ et $(x - 1)^2 - x^2$ ne sont pas du second degré

Théorème 1
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- ➢ $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser.
- ➢ $\Delta = 0$: l'équation a une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  le trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_0)^2$.
- ➢ $\Delta > 0$: l'équation possède 2 solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  le trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 4
Soit l'équation $-6x^2 + x + 1 = 0$.
- ➔ $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$.
- ➔ Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-12} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-12} = -\frac{1}{3}.$$

- ➔ $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ et la forme factorisée de P est : $P(x) = -6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Soit l'équation $-6x^2 + x + 1 = 0$.
- ➔ $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$.
- ➔ Le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution réelle.

➔ $S = \varnothing$ et P ne se factorise pas.

Soit l'équation $2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$.

➔ $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{25}{8} = 0$.

➔ Le discriminant est nul, il y a une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{4}$.

➔ $S = \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$ et la forme factorisée de P est : $P(x) = 2\left(x + \dfrac{5}{4}\right)^2$.

Théorème 2
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.

Exemple 5
$f(x) = -6x^2 + x + 1$:

➔ Le discriminant est positif, f est du signe de $a = -6$, donc négative sauf entre ses racines $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

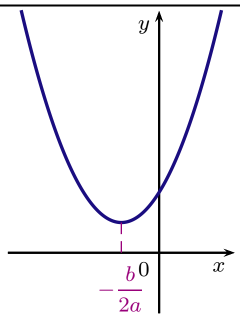
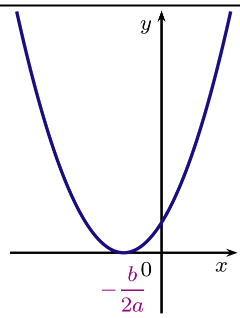
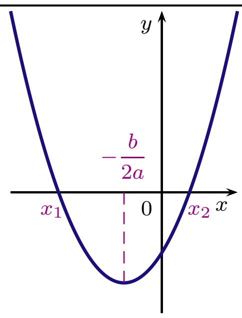
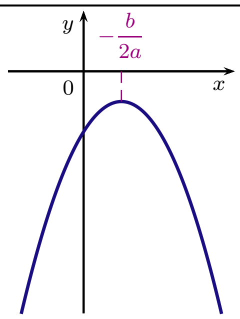
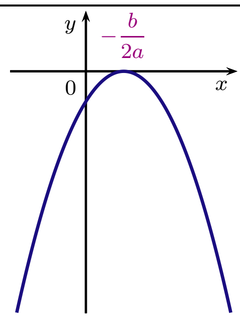
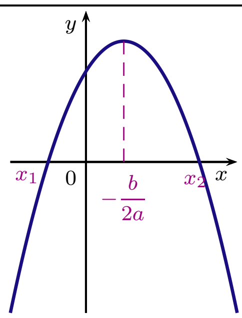
$f(x) = 5x^2 + 6x + 2 = 0$:

➔ Le discriminant est négatif, f est du signe de $a = 5$, donc positive sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$:

➔ Le discriminant est nul, f est du signe de $a = 2$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et nulle en $x_0 = -\dfrac{5}{4}$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

	Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	Variations	x : $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ $f(x)$: $\searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Négatif sur $[x_1; x_2]$
$a < 0$	Variations	x : $-\infty$; $-\frac{b}{2a}$; $+\infty$ $f(x)$: $\nearrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Positif sur $[x_1; x_2]$

I.4 Fonction logarithme

Définition 4
La fonction logarithme népérien, notée ln*, est l'unique primitive de la fonction* $x \to$ ………*définie sur qui s'annule en* ………

Conséquences directes :
- $\ln(1) =$ ……………………………………………………………………………………………
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]\, 0\ ;\ +\infty\, [$ et pour tout $x > 0$, $\ln(x) =$ ……………………………

Propriété 2
Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :
- ♦ $\ln(ab) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ♦ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ♦ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ♦ $\ln(a^n) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ♦ $\ln\left(\sqrt{a}\right) =$ ……………………………………………………………………………………………

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en ………………, les quotients en ………………et les puissances en ………………

Exemple 6
Transformations d'expressions numériques et algébriques (sur les intervalles où elles sont définies) :
- ➔ $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ➔ $\ln(\sqrt{96}) =$ ……………………………………………………………………………………………
- ➔ $\ln(x+3) + \ln(2x+1) =$ ……………………………………………………………………………………

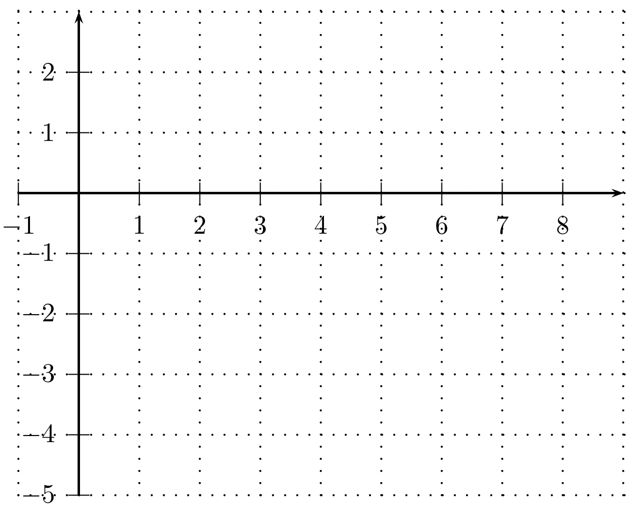
Propriété 3
On a les limites importantes suivantes :

♦ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x =$ ……………… ♦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x =$ ………………

Conséquence : La droite $x = 0$ est donc ………………………………………à la courbe représentative de la fonction ln.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	
$f'(x)$	
f	
signe	



I.5 Fonction exponentielle

Définition 5
La fonction exponentielle, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x.

Remarque 1
On dit que la fonction exponentielle est la fonction ....de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, ...

Conséquences directes :

- $\exp(x)$ ....
- $\exp(1)$ ....
- $\ln(e^x)$ ....
- $e^{\ln x}$ ....
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$: $y = e^x$ ....

Propriété 4
Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :
- ♦ e^{a+b} ....
- ♦ $\dfrac{1}{e^a}$ ....
- ♦ $\dfrac{e^a}{e^b}$ ....
- ♦ $(e^a)^n$ ....

En résumé, l'exponentielle à la particularité de transformer les sommes en ...., les différences en ....et les multiplications en .... (inversement au logarithme !).

Exemple 7
Transformations d'expressions numériques et algébriques :

➔ $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3}$ ....

➔ $e^{x+3} \times e^{2x+1}$ ....

➔ $(e^{x-2})^2$ ....

Propriété 5
On a les limites importantes suivantes :

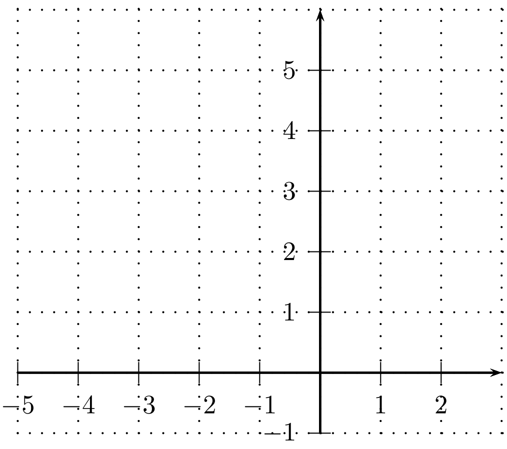
♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$=.................   ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$=.................

Conséquence : La droite d'équation $y = 0$ est donc ....à la courbe représentative de la fonction exp.

Propriété 6
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' =$ ....

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	
$f'(x)$	
f	
signe	



I.6 Fonctions puissance

Définition 6
Soit α un nombre réel, la fonction puissance (d'exposant) α, notée f_α est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe

$$f_\alpha(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 8
Dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, on a ....

Propriété 7
Pour tout α, la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_\alpha(x) =$ ....

Sens de variation :
Dans le cas où $\alpha = 0$, ...

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, ...

D'où les tableaux de variation suivants :

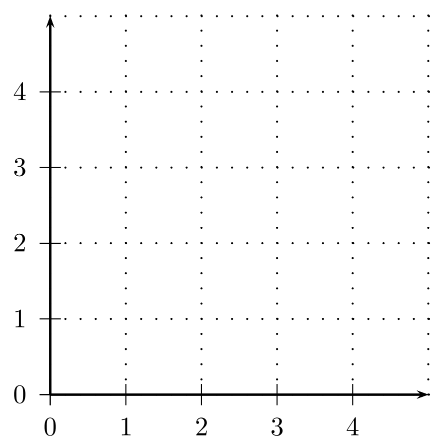
$\alpha < 0$

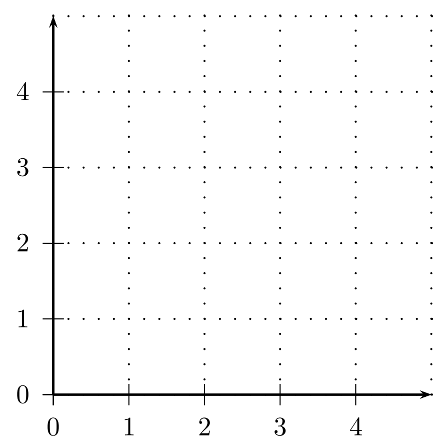
x	
signe de $f'_\alpha(x)$	
variations de f_α	
signe de f_α	

$\alpha > 0$

x	
signe de $f'_\alpha(x)$	
variations de f_α	
signe de f_α	

Allure des courbes représentatives des fonctions puissance :

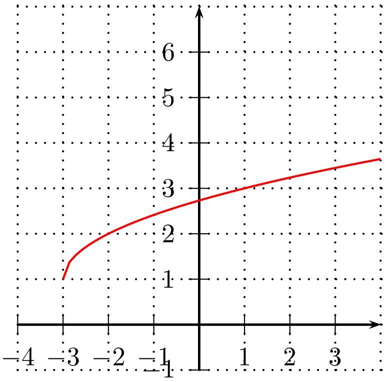




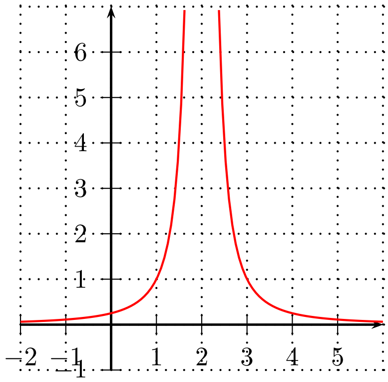
II limites

II.1 Interprétation graphique

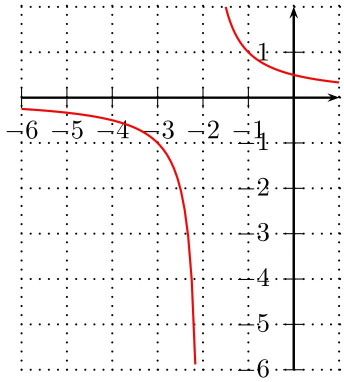
Limite en un point :



. . . .
. . . .
. . . .

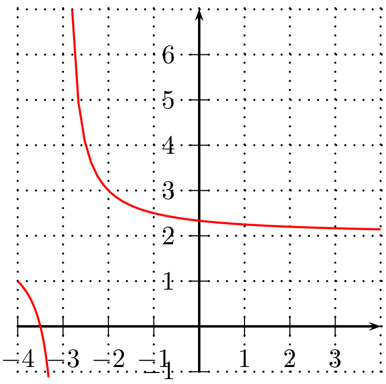


. . . .
. . . .
. . . .

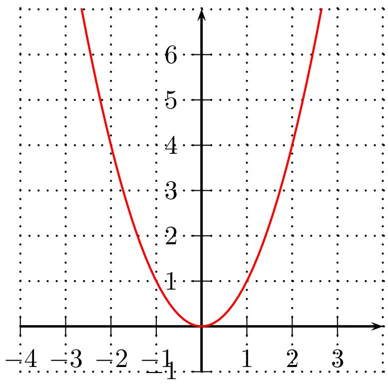


. . . .
. . . .
. . . .

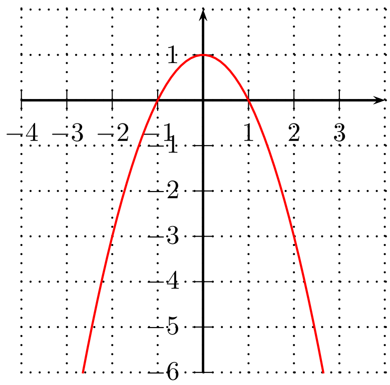
Limite en $+\infty$:



. . . .
. . . .
. . . .

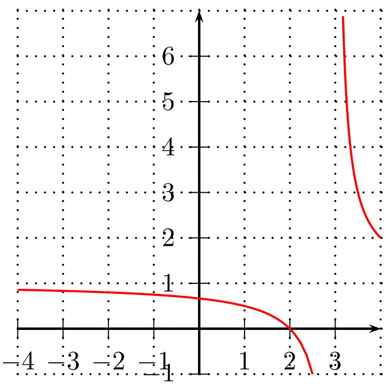


. . . .
. . . .
. . . .

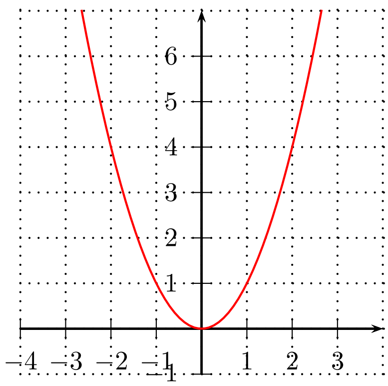


. . . .
. . . .
. . . .

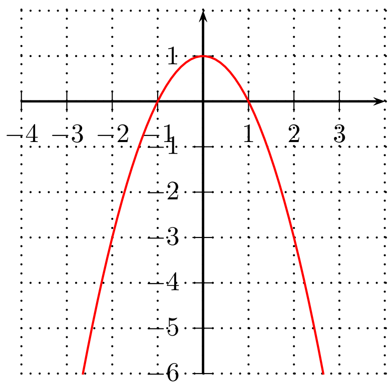
Limite en $-\infty$:



. . . .
. . . .
. . . .



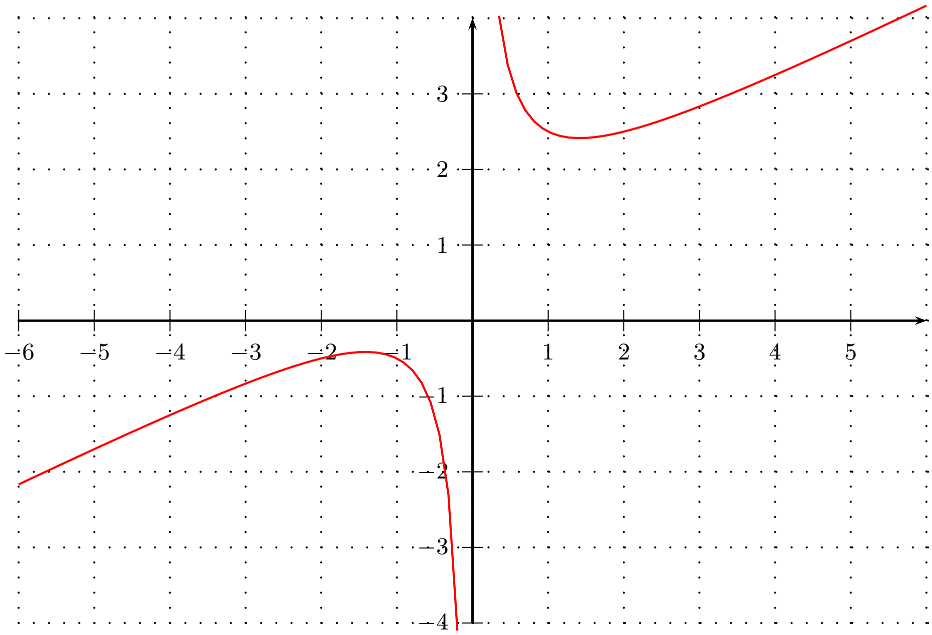
. . . .
. . . .
. . . .



. . . .
. . . .
. . . .

Définition 7
Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :
. . . .
on dit alors que la droite d est une . . . . .à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exemple 9
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



. . . .

. . . .

. . . .

II.2 Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence (la notation « $*$ »signifie qu'il faut appliquer la « règle des signes »).

$f(x)$	x^n $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$	x^α $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$\ln x$	$\exp x$	$\cos x$	$\sin x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$								
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$								

II.3 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

II.3.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$					

Exemple 10
Calcul de « sommes » de limites :

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x^3\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x} + x^2\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x + x^2\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x + x^3\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2 + x^3\right)$ ....

II.3.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f \times g)$				

Exemple 11
Calcul de « produit » de limites :

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to 0}\left[(e^x + 3) \times (e^x - 2)\right]$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x - 3) \times \dfrac{1}{x}\right]$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to -\infty}\left[(x - 1) \times x^3\right]$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to -\infty}\left[(x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}\right]$ ....

II.3.3 Limite d'un quotient

$\lim\ f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim\ \left(\dfrac{f}{g}\right)$						

Exemple 12
Calcul de « quotients » de limites :

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x + 3}{e^x - 2}\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x} - 3}{x^2}\right)$ ....

➔ ....
....
$\left.\right\}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x - 4}{x}\right)$ ....

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)$ ....

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$ ....

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ ....

II.3.4 Compositions

Propriété 8
Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.
Si $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c\end{array}\right\}$ alors ....

Exemple 13
Calcul de "composition" de limites :

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+3}$ ....

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1)$ ....

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+4}$ ....

II.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination

Exemple 14
Indétermination du type « $\infty - \infty$ » :

➔ .... $\left.\right\}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - x)$ ....

➔ On met x^2 en facteur : ....

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ....

Remarque 2
De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dictée par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple 15
Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ ....

➔ Pour $x \neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

....

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ....

Remarque 3
De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dicté par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.

Exemple 16
Indétermination du type « $0\times\infty$ » :

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ ....

➔ On développe : ....

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ....

Exemple 17
Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

➔ ....
....
$\Big\}\ \lim_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ ....

➔ On factorise : ....

➔ ....

II.5 Croissance comparée de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissance

Propriété 9
Pour tout nombre réel α strictement positif :

♦ $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\right) = \dots\dots\dots$ ♦ $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right) = \dots\dots\dots$

L'idée à retenir : Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $x\to\ln x$, $x\to x^\alpha$ et $x\to e^x$ prennent des valeurs qui se classent dans cet ordre de la plus petite à la plus grande.

III Dérivation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, C sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I

III.1 Nombre dérivé en un point

On souhaite trouver une fonction affine (droite) qui réalise une bonne approximation de la fonction f au voisinage d'un point d'une courbe.

Exemple 18

Pour h voisin de 0, on a :

➔ $(1+h)^2 =$ .... donc, quand h tend vers 0, $(1+h)^2 \approx$ ....

➔ $(1+h)^3 =$ .... donc, quand h tend vers 0 : $(1+h)^3 \approx$ ....

Définition 8

Soit f une fonction définie en a et au voisinage de a, on dit que f est ....s'il existe un réel A est une fonction ϵ tels que, au voisinage de $h = 0$, on a :

....

A est appelé ....de f en a.

Exemple 19

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

➔ $f(a+h) =$ ....

➔ Donc, f est dérivable en a de nombre dérivé ....

Définition 9

➤ *Le <u>taux de variation</u> de la fonction f entre a et x est le quotient :* ....

➤ *Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi :* ....

➤ *f est <u>dérivable</u> en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :*

....

Exemple 20

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

➔ le taux de variation de f entre a et $a+h$ est :

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} =$ ....

➔ donc, $f'(a) =$ ....

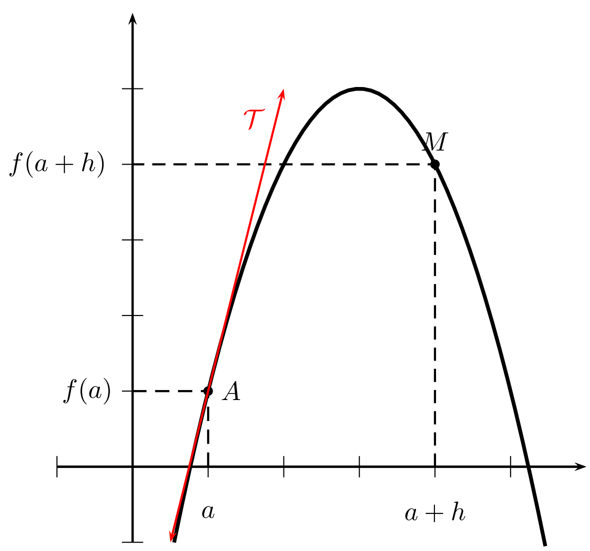
➔ En particulier, $f'(3) =$ ......, $f'(0) =$ ....

Interprétation graphique :

Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A.

Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A

$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.



III.2 Fonction dérivée

Définition 10
Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé ....de f sur I.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f
k		
$ax+b$		
$\frac{1}{x}$		
$\sqrt{x}$		
x^{α}		
$\ln(x)$		
e^{x}		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		

Exemple 21
Calcul de la dérivée des fonctions suivantes :

- ➔ $f(x)=\pi$ .... ➔ $f(x)=x^3$ ....
- ➔ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ .... ➔ $f(x)=x^{2007}$ ....

III.3 Dérivées successives

Définition 11
Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les <u>dérivées successives</u> de f notées :

....

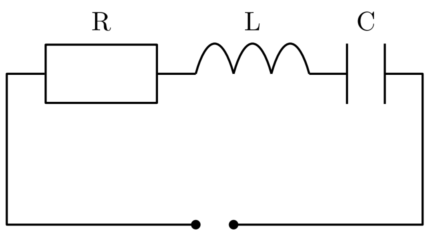
Exemple 22
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-x^2+x+3$.

- ➔ $f'(x)=$ ....
- ➔ $f''(x)=$ ....
- ➔ $f'''(x)=$ ....
- ➔ $f^{(4)}=$ ....

En physique et en mécanique, on utilise la notation différenteielle : $\dfrac{df}{dx}=f'$ et $\dfrac{d^2f}{dx^2}=f''$

Exemple 23
Dans un circuit R, L, C en série, on a :

- ➔ $i=\dfrac{dq}{dt}$.
- ➔ $e=-L\dfrac{di}{dt}$.
- ➔ donc : $e=-L\dfrac{d^2q}{dt^2}$.



III.4 Opérations

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition		
Multiplication par un nombre		
Multiplication		
Puissance		
Division		
Inverse		
Fonction composée		
exponentielle		
logarithme		
sinus		
cosinus		

Exemple 24
Calcul de dérivées :

- ➔ $f(x) = x^3 + x + 3$: ....
....
- ➔ $f(x) = 3(x^2 + 4)$: ....
....
- ➔ $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$: ....
....
- ➔ $f(x) = (2x - 7)^2$: ....
....
- ➔ $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$: ....
....
- ➔ $f(x) = \dfrac{1}{-3x + 1}$: : ....
....
- ➔ $f(x) = e^{3x+1}$: ....
....
- ➔ $f(x) = \ln(-2x + 5)$: ....
....
- ➔ $f(x) = \cos(2x + 1)$: ....
....

III.5 Équation de la tangente

Propriété 10
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente $\mathcal{T}_a$ en a à la courbe C_f a pour équation :

....

Exemple 25
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Les équations des tangentes en 0 et en -1 sont :
- ➔ $f'(x) =$ ....
- ➔ ....
- ➔ ....

IV Étude des variations d'une fonction

IV.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

L'idée est qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur de la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ et le sens de variation de la fonction f.

Propriété 11
On suppose que f est dérivable sur I.
- ♦ f est croissante sur $I \Longleftrightarrow$ ....
- ♦ f est décroissante sur $I \Longleftrightarrow$ ....
- ♦ f est constante sur $I \Longleftrightarrow$ ....

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 26
Étude d'une fonction polynôme :
Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :
- ➔ Pour tout réel x on a $f'(x)$ ....
- ➔ On détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines et on trouve ....
- ➔ On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	
signe de $f'(x)$	
variations de f	

- ➔ ....

Exemple 27
Etude d'une fonction logarithme :
Soit $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminons son sens de variation :

- ➔ Pour tout réel $x > 0$ on a $g'(x) =$ ....
- ➔ On peut déterminer le signe de la dérivée grâce à un tableau de signes puis en déduire les variations de la fonction g :

x	
signe de $g'(x)$	
variations de g	

➔ ....

Exemple 28
Etude d'une fonction exponentielle :
Soit $h(x) = (x + 2)\ e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

➔ Pour tout réel x on a $h'(x) =$ ....

➔ On peut déterminer le signe de la dérivée grâce à un tableau de signes puis en déduire les variations de la fonction h :

x	
signe de $h'(x)$	
variations de h	

➔ ....

IV.2 Extremum d'une fonction

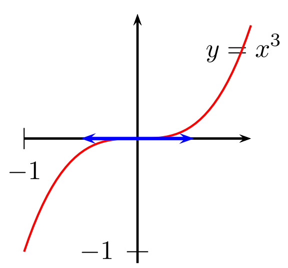
Propriété 12
f est une fonction dérivable sur l'intervalle I. Si f admet un extremum (...)
en a distinct des extrémités de I, alors ....

Remarque 4
Attention, la réciproque n'est pas vraie : le fait que $f'(a) = 0$ n'implique pas forcément qu'il existe un extremum en a.

Exemple 29

➔ La fonction $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

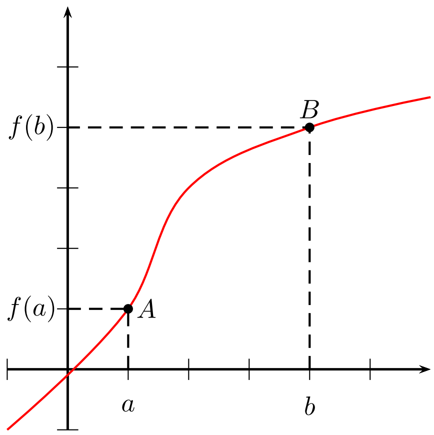
➔ $f'(x) = 3x^2$ donc, $f'(0) = 0$ mais f n'admet ni minimum, ni maximum en 0.



Remarque 5
La tangente à la courbe en un point a où $f'(a) = 0$ est ....

IV.3 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété 13
Si f est une fonction continue, dérivable et strictement monotone ....
sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ alors, pour tout $\lambda \in [\ f(a)\ ;\ f(b)\ ]$, l'équation $f(x) = \lambda$ ....
....



Exemple 30
Soit $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-1} près.

➔ ....

➔ ....

➔ ....

➔ ....

➔ ....

➔ ....

➔ ....

➔ ....