$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 720$

Exercices : Développements limités

EXERCICE 1
Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $x \mapsto ln(1+x)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

EXERCICE 2 Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$

EXERCICE 3
Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 des fonctions suivantes :

$f(t) = \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + t^6\varepsilon(t)$

$g(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$

long calcul

$h(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{0,5(0,5-1)}{2}x^2 + \frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)}{6}x^3 + \dots$

$\alpha = \frac{1}{2}$ $\Big|$ $= 1 + 0,5x - 0,125x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + x^6\varepsilon(x$

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x + 5x^2$.
Compléter le tableau ci-contre :

$Dl_1(0)$	$4 - x + x\varepsilon(x)$
$Dl_2(0)$	$4 - x + 5x^2$
$Dl_3(0)$	$4 - x + 5x^2$
$Dl_4(0)$	$4 - x + 5x^2$

EXERCICE 5
Donner le développement limité à l'ordre $\cancel{6}$ 3 en 0 de : $t \mapsto e^t + \dfrac{1}{1+t}$

$e^t + \frac{1}{1+t} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6\right) + \left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6\right) + t^6\varepsilon(t)$

$= 1 + 1,5t^2 - \frac{5}{6}t^3 + \frac{25}{24}t^4 - \frac{119}{120}t^5 + \frac{721}{720}t^6 + t^6\varepsilon(t)$

EXERCICE 6
Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $f(t) = \cos(t)\sin(t)$

$\cos(t)\sin(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)\left(t - \frac{1}{6}t^3\right) + t^3\varepsilon(t)$

$= 1 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^3 + t^3\varepsilon(t)$

EXERCICE 7
Donner le développement limité à l'ordre $\cancel{6}$ 2 en 0 de : $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ $= e^x \times \frac{1}{1+x}$

$\frac{e^x}{1+x} = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + x^6\varepsilon(x)\right)$

$=$

EXERCICE 8
Donner le développement limité à l'ordre 7 en 0 de : $f(t) = \sin(3t)$

$\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{5040}t^7 + t^7\varepsilon(t)$

$f(t) = 3t - \frac{1}{6}(3t)^3 + \frac{1}{720}(3t)^5 - \frac{1}{5040}(3t)^7 + t^7\varepsilon(t)$

EXERCICE 9

1. Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 de : $x \mapsto e^{-x}$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \frac{(-x)^5}{5!} + \frac{(-x)^6}{6!} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + x^6\varepsilon$

2. En déduire le développement limité à l'ordre 6 en 0 de : $f(x) = e^x - e^{-x}$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + x^6\varepsilon(x)$

$-e^{-x} = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}x^6 + x^6\varepsilon(x)$

$(+)$ $e^x - e^{-x} = 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + x^6\varepsilon(x)$