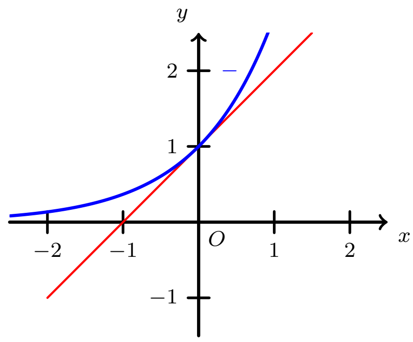
Les Développements Limités

I. La fonction exponentielle

On cherche à approcher, au voisinage de zéro, la fonction exponentielle par un polynôme.

Cela revient à trouver un polynôme dont la courbe, au voisinage de 0, se rapproche de la courbe − de la fonction exponentielle.

Degré 1 : On peut approcher la courbe Γ par sa tangente en 0.



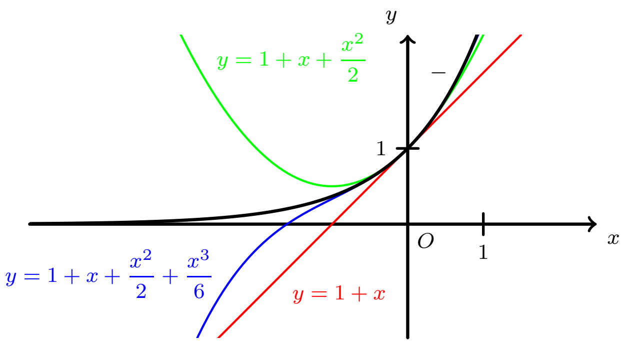
Cette tangente a pour équation réduite $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

Or, on a : $\begin{cases} f(x) = e^x & \text{donc} \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \text{donc} \quad f'(0) = 1 \end{cases}$

Donc la tangente a pour équation réduite $y = x+1$.

La première approximation que nous connaissons est donc $e^x \approx$ ....

Propriétés : Au voisinage de 0, $e^x =$ .... où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.



Pour les degrés supérieurs, on a les approximations :

Propriétés : Au voisinage de 0, $e^x =$ ....
où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Propriétés : Au voisinage de 0, $e^x =$ ....
où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Nous venons d'écrire les développements limités, d'ordre 1, 2 et 3, de la fonction exponentielle en 0.

II. Développement limité

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée :

$$f(x) = \text{..}$$

On dit que $P_n(x)$ est la ....du développement limité et $x^n\epsilon(x)$ est le reste.

Remarque :

La partie régulière du développement limité d'ordre 1 en 0 d'une fonction f correspond à l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $\quad f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + x\epsilon(x) \quad$ soit $\quad f(x) = f(0) + xf'(0) + x\epsilon(x)$.

Exemples de développement limité d'ordre 1 en 0 :

$f(x) = e^x$ donc $f(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = \ln(1+x)$ donc $f(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = (1+x)^\alpha$ donc $f(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = \sin x$ donc $f(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = \cos x$ donc $f(x) = \dots\dots\dots$

Propriétés : Développements limités usuels : au voisinage de 0, on a...

* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$.

* $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$.

* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$.

* $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n\epsilon(x)$.

* $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n\epsilon(x)$.

* $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$.

Application : Tangente en 0 et position de la courbe par rapport à cette tangente.

* Le développement limité d'ordre 1 nous donne l'équation de la tangente.
* Le développement limité d'ordre 2 nous permet, en soustrayant le développement limité d'ordre 1, et en regardant le signe de ce qui reste, d'obtenir la position de la courbe par rapport à la tangente.
* Si ce qui reste est nul, on prend le développement limité d'ordre 3, ou d'ordre 4...

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité en 0 de f à l'ordre 3 : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + x^3\epsilon(x)$
   Déterminer le développement limité en 0 de f à l'ordre 1.
2. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
3. Déterminer la position relative de T et $\mathcal{C}_f$.