UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mémoire de Master 2

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et Applications

Anthony OLLIVIER

Professeur : Bachir BEKKA

Année 2015 — 2016

Table des matières

1 Plan

Les espaces complets sont les espaces dans lesquels les problèmes de limites s'étudient le plus simplement. La première partie donne les définitions générales et explicite quelques propriétés de la complétude dans les espaces métriques dont le théorème du point fixe, dont le résultat d'existence à la fois très simple et extrêmement utile dans la pratique. Dans cette partie, on montre aussi que tout espace métrique peut être considéré comme une partie dense d'un espace complet, son complété, ce qui permet souvent la construction de nouveaux espaces aux propriétés utiles. Dans une seconde partie, on étudiera la notion de complétude dans des espaces plus restreints : les espaces vectoriels normés. Ensuite, la troisième partie traitera des espace de Baire où la complétude permet d'en donner les principaux exemples et théorèmes de l'analyse fonctionnelle. Puis dans la quatrième partie, on étudiera la complétude dans des espaces avec plus de propriétés : les espaces de Hilbert.

1.1 Espace métrique

Dans cette partie $(E,\ d)$ désigne un espace métrique.

Nous introduisons la notion générale de suite de Cauchy :

Définition 1.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E, on dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si* $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Nous énonçons maintenant quelques propriétés sur les suites de Cauchy.

Proposition 1.2. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente (de limite x). Soit $\varepsilon > 0$, considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $\forall p, q \geq N$:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_n$ est bien de Cauchy.

□

Proposition 1.3. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy, il existe alors $N \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < 1$.

En particulier : $\forall p \geq N$, $d(x_p, x_N) < 1$.

D'où $\forall p \geq N$, $x_p \in B(x_N, 1) \subset B(0, d(x_N, 0) + 1)$.

Soit $R = max\{d(x_i, 0) + 1,\ i = 0, \ldots, N\}$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in B(0, R)$

Ainsi la suite $(x_n)_n$ est bornée. □

Proposition 1.4. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est de Cauchy*

Démonstration. Soient l une valeur d'adhérence de la suite de Cauchy (x_n) et $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus il existe $n_0 \geq N$ tel que $d(x_{n_0}, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq N$, on a $d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc l est limite de (x_n). □

Attention, la notion de suite de Cauchy n'est pas topologique (i.e. elle ne peut pas être définie à partir des ouverts de E). Même si deux distances sont topologiquement équivalentes, on ne peut être sûr que les suites de Cauchy soient les mêmes pour les deux métriques. Par exemple avec $d(x,y) = |arctan(x) - arctan(y)|$, la topologie sur $\mathbb{R}$ est la même que pour la topologie usuelle, mais la suite $u_n = n$ n'est pas de Cauchy pour la métrique usuelle, alors qu'elle est de Cauchy pour cette métrique.

Cependant on a le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Soient d, d', deux distances uniformément équivalentes de E. Une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(E,\ d)$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans $(E,\ d')$.*

Démonstration. Comme d, d' sont deux distances uniformément équivalentes de E, l'application $Id_d :\ (E,\ d)\ \longrightarrow (E,\ d')$ est une application uniformément continue, et soit x une suite de Cauchy de (E,d). Fixons $\varepsilon > 0$. Comme Id_d est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x_1 et x_2 de E, on a : $d(x_1,x_2) \leq \eta \Rightarrow d'(x_1,x_2) \leq \varepsilon$. Comme x est de Cauchy dans (E,d), il existe un entier naturel N tel que pour tous $p,\ q > N$, on a : $d(x_p,x_q) < \eta$. A fortiori, pour $p,\ q > N$, on a par l'implication ci-dessus : $d'(x_p,x_q) < \varepsilon$. La suite (x_n) est donc elle-même de Cauchy dans (E,d'). Réciproquement, on montre que la même manière que si x est une suite de Cauchy dans (E,d') alors elle est de Cauchy dans (E,d) en considérant l'application $Id'_d :\ (E,\ d')\ \longrightarrow (E,\ d)$ qui est aussi une application uniformément continue par équivalences uniformes des distances d et d'. □

Nous pouvons maintenant introduire la notion principale de cette partie :

Définition 1.6. *L'espace métrique (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.*

Comme pour les suite de Cauchy, la complétude est une propriété métrique, mais pas topologique, ce qui signifie qu'un espace métrique complet peut être homéomorphe à un espace qui ne l'est pas. Par exemple, pour la distance usuelle, l'espace des nombres réels est complet, bien qu'homéomorphe à l'intervalle $]-1,\ 1[$ qui, lui, ne l'est pas (un exemple d'homéomorphisme est la bijection h de $]-1,\ 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = tan(x\pi/2)$).

Donnons des exemples fondamentaux d'espaces complets :

Exemple. Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ munis de la distance usuelle sont des espaces complets

Exemple. L'espace $(\mathbb{Q}, |\ |)$ n'est pas complet.

Remarque. Dans la pratique, pour montrer qu'un espace est complet, on suit très souvent le schéma suivant : on considère une suite de Cauchy, on construit sa limite éventuelle, on vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ et enfin, on vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ et enfin on vérifie que la suite de Cauchy converge bien vers cette limite.

Proposition 1.7. *Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.*

Démonstration. Soit A une partie complète d'un espace métrique E. Montrons que A est fermé. Soit (a_n) une suite de points de A convergeant dans E, alors par la proposition 1.2 la suite (a_n) est de Cauchy dans A, donc (a_n) converge vers un point $a \in A$. D'où A est fermée. □

Proposition 1.8. *Toute partie fermée d'un espace complet est complet*

Démonstration. Soit A une partie fermé d'un espace complet E. Soit (a_n) un suite de Cauchy dans A ($\subset$ E). La suite (a_n) converge donc vers $a \in$ E (par complétude de E), mais A est fermé dans E, donc $a \in$ A. Ainsi A est une partie complète de E. □

Proposition 1.9. *Soient $(E_1,\ d_1), \ldots, (E_n,\ d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times \cdots \times E_n$ (au sens de la distance produit) est complet si et seulement si pour tout i, l'espace $(E_i,\ d_i)$ est complet.*

Démonstration. Supposons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(E_n,\ d_n)$ est complet.

Soient $A_m = (a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ une suite de Cauchy dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Alors soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on ait :

$$\begin{aligned} d(A_p, A_q) &< \varepsilon \\ \text{d'où } \max_{i=1,\ldots,n} \big(d_i(a_{ip}, a_{iq})\big) &< \varepsilon \\ \text{c'est à dire } \forall i \in [\![1, n]\!],\ d_i(a_{ip}, a_{iq})) &< \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(a_{im})_m$ est de Cauchy dans (E_i, d_i) qui est complet. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{im})_m$ converge. Ainsi la suite $(A_m)_m = ((a_{1m}, \ldots, a_{nm}))_m$ converge.

Réciproquement supposons que l'espace $E_1 \times \cdots \times E_n$ (pour la distance produit d) est complet. Soit $(a_{im})_m$ une suite de Cauchy dans (E_i, d_i) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. A partir de ces suites, nous contruisons une suite $(A_m)_m$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la façon suivante : pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{nm})$. Montrons que cette suite est de Cauchy dans $E_1 \times \cdots \times E_n$. Soit $\varepsilon > 0$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on ait :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!],\ d_i(a_{ip}, a_{iq}) &< \varepsilon \\ \text{d'où } \max_{i=1,\ldots,n} \big(d_i(a_{ip}, a_{iq})\big) &< \varepsilon \\ \text{ainsi } d(A_p, A_q) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Donc la suite $(A_m)_m$ est de Cauchy, or (E,d) est complet, donc $(a_{1m}, \ldots, a_{nm})_m$ converge vers $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{im})_m$ converge.

Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'espace (E_i, d_i) est complet. □

Proposition 1.10. *Soit (E,d) complet, et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de E, tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ (où $\delta(F_n)$ est le diamètre de F_n). Alors, il existe $x \in E$, tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.*

Démonstration. Notons $\Gamma = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. L'ensemble Γ est non vide. En effet, choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$. Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ entraîne que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, (en effet, soit $\varepsilon > 0$, considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(F_n) < \varepsilon$, alors $\forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$, car x_p, x_q appartiennent à F_n donc converge dans E puisque E est complet. Comme les F_p sont fermés et que $x_n \in F_p$ lorsque $n \geq p$, la limite l de $(x_n)_n$ appartient à F_p, pour tout p, donc à Γ. Ainsi $\Gamma \neq \varnothing$.

Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ montre que Γ a au plus un élément. □

Nous allons maintenant voir l'une des applications les plus intéressantes de la complétude : le théorème de point fixe.

Théorème 1.11 (Théorème de point fixe)**.** *Soit (E,d) complet, et une application $f : E \longrightarrow E$ telle qu'il existe $k \in [0, 1[$, $\forall (x, y) \in E^2,\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe.*

Démonstration. - <u>Existence :</u>

Fixons $x_o \in E$. On définit la suite $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = f(x_n)$. Une récurrence immédiate nous montre que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi lorsque $p < q$:

$$\begin{aligned}
d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\
&\leq (k^p + \cdots + k^{q-1}) d(x_1, x_0) \\
&\leq k^p (1 + \cdots + k^{q-1-p}) d(x_1, x_0) \\
&\leq k^p \times \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $(x_n)_n$ est de Cauchy. Comme E est complet, la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$. Or f est continue (car lipschitzienne), donc $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = x$. Donc x est point fixe de f.

- Unicité :

Supposons $f(x) = x$ et $f(y) = y$:

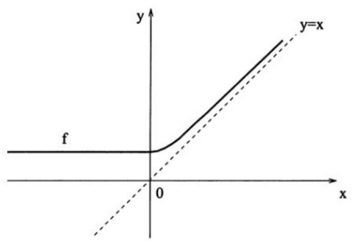
$0 \leq d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$

D'où $0 \leq d(x, y) \leq kd(x, y)$ avec $0 < k < 1$.

Ceci n'est possible que si $d(x, y) = 0$. Ainsi $x = y$.

□

Exemple. Le résultat est FAUX si l'on suppose seulement $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$. En effet, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{sinon.} \end{cases}$ est continue sans point fixe.



De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la dérivée $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(1+x)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$ ainsi la fonction f vérifie l'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ par l'inégalité des accroissements finis.

Cependant dans un compact, une telle condition suffit à montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe. En effet :

Proposition 1.12. *Soit (E,d) un espace métrique compact, et une application $f : E \longrightarrow E$ telle que*

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y) \tag{1}$$

Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. – Existence :

L'application $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue (en tant que composé d'applications continues) sur le compact E. Donc il existe $\alpha \in E$ tel que $d(\alpha, f(\alpha)) = \inf_{x \in E} d(x, f(x))$. Supposons $\alpha \neq f(\alpha)$, posons $\beta = f(\alpha)$. D'après 1, on a $d(\beta, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = d(\alpha, f(\alpha))$, ce qui contredit la définition de α. Donc α est un point fixe de f.

– Unicité :

Supposons $\alpha = f(\alpha)$ et $\beta = f(\beta)$ et $\alpha \neq \beta$, on a $d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta)$, ce qui est absurde par 1. Ainsi $\alpha = \beta$ et donc il existe un unique point fixe pour f.

□

Application 1.13. *Soit* (E, d) *complet et une application* $f : E \mapsto E$. *Si il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que* f^r $(f \circ \cdots \circ f)$ *est* k*-contractante* $(0 < k < 1)$. *Alors* f *admet un unique point fixe.*

Démonstration. Comme E est complet et que $f^r : E \mapsto E$ est k-contractante, f^r a un unique point fixe $x \in E$. De l'égalité $f^r(x) = x$, on tire $f(f^r(x)) = f(x) = f^r(f(x))$, ce qui montre que $f(x)$ est un point fixe de f^r, on a donc forcément $f(x) = x$.

Maintenant, x est le seul point fixe de f car l'égalité $f(y) = y$ entraîne $f^r(y) = y$ donc $y = x$ car x est le seul point fixe de f^r. □

Application 1.14. *Soit* (E, d) *complet et* (X, δ) *un espace métrique. Considérons une application* $F : \begin{array}{ll} X \times E & \longrightarrow E \\ (\lambda, x) & \longmapsto F(\lambda, x) \end{array}$ *continue et* k*-contractante en la seconde variable, i.e.*

$$\exists k \in [0, 1],\ \forall \lambda \in X, \forall (x, y) \in E^2,\ d(F(\lambda, x), F(\lambda, y)) \leq kd(x, y)$$

Alors pour tout $\lambda \in X$, $F(\lambda, .) : x \mapsto F(\lambda, x)$ *admet un unique point fixe que l'on note* x_λ. *Et l'application :* $\begin{array}{ll} X & \longrightarrow E \\ \lambda & \longmapsto x_\lambda \end{array}$ *est continue.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in X$, l'application $F(\lambda, .) : E \mapsto E$ est k-contractante, donc admet un unique point fixe x_λ car E est complet. Montrons que l'application $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue. Si $\lambda, \lambda' \in X$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_\lambda, x_{\lambda'}) = d(F(\lambda, x_\lambda), F(\lambda', x_{\lambda'})) &\leq d(F(\lambda, x_\lambda), F(\lambda, x_{\lambda'})) + d(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'})) \\ &\leq kd(x_\lambda, x_{\lambda'}) + d(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'})) \end{aligned}$$

Donc

$$d(x_\lambda, x_{\lambda'}) \leq \frac{1}{1-k} d(F(\lambda, x_{\lambda'}), F(\lambda', x_{\lambda'}))$$

La continuité de F au point $(\lambda', x_{\lambda'})$, permet maintenant d'affirmer $\lim\limits_{\lambda \to \lambda'} x_\lambda = x_{\lambda'}$, d'où le résultat. □

Proposition 1.15. *Soit E,F deux espaces métriques. On suppose que F est complet. Soit A une partie dense de E et* $f : A \to F$ *une application uniformément continue. Il existe* $g : E \to F$ *uniformément continue qui prolonge f.*

Démonstration. Idée : on montre qu'en tout point de E, f a une limite et on pose $g(x) = lim_{y \in A, y \to x} f(y)$ □

Théorème 1.16 (Complété d'un espace métrique)**.** *Tout espace métrique* (E, d) *admet un complété, c'est à dire un espace métrique* (F, δ) *complet tel qu'il existe une isométrie i de E sur une partie dense de F.*

Démonstration. On note C l'ensemble des suites de Cauchy de (E, d). Soient $U = (u_n)_n$ et $V = (v_n)_n \in C$. Montrons que la suite $(d(u_n, v_n))_n$ converge. On note $\delta(U, V)$ sa limite. On montre que la suite $(d(u_n, v_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$d(u_p, v_p) \leq d(u_p, u_q) + d(u_q, v_q) + d(v_q, v_p),$$

donc, en échangeant le rôle de p et q,

$$|d(u_q, v_q) - d(u_p, v_p)| \leq d(u_p, u_q) + d(v_q, v_p).$$

Les suites U et V étant de Cauchy, on en déduit que $(d(u_n, v_n))_n$ est de Cauchy.
Montrons que δ est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Ceci est immédiat par passage

à la limite puisque d est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.
On considère la relation d'équivalence sur C définie par

$$(U \sim V) \Leftrightarrow (\delta(U,V) = 0).$$

On note $\widehat{E}$ l'espace quotient $C/\sim$ et $\widehat{U}$ la classe d'équivalence dans $\widehat{E}$ de $U \in C$.

On remarque que la classe d'équivalence d'une suite convergente dans E est l'ensemble des suites qui convergent vers la limite de cette suite. En effet, soit $U = (u_n)_n$ une suite de E convergeant vers $x \in E$. Une suite convergente est de Cauchy donc $U \in C$. Soit $V = (v_n)_n \in C$. On a

$$U \sim V \Leftrightarrow \delta(U,V) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0.$$

Les inégalités $d(x, v_n) \leq d(x, u_n) + d(u_n, v_n)$ et $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, x) + d(x, v_n)$ montrent que $U \sim V$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(x, v_n) = 0$. Finalement, la classe de U est l'ensemble des suites qui convergent vers x.

Montrons que si $U \sim U'$ et $V \sim V'$ alors $\delta(U,V) = \delta(U',V')$. Lorsque $\widehat{U}, \widehat{V} \in \widehat{E}$, le réel $\delta(U,V)$ est donc indépendant du choix des représentants. On le note $\delta(\widehat{U}, \widehat{V})$.

Si $U \sim U'$ et $V \sim V'$, comme δ satisfait l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(U,V) \leq \delta(U,U') + \delta(U',V') + \delta(V',V) = \delta(U',V'),$$

de même $\delta(U',V') \leq \delta(U,V)$. Donc $\delta(U,V) = \delta(U',V')$.
Ainsi définie, δ est une distance sur $\widehat{E}$. En effet, d'après ce qui précède, il suffit de voir que $\delta(\widehat{U}, \widehat{V}) = 0$ si et seulement si $\widehat{U} = \widehat{V}$. Ceci est vrai par construction de la relation d'équivalence.

Montrons ensuite qu'il existe une injection naturelle $i : E \to \widehat{E}$, isométrique et que $i(E)$ est dense dans $\widehat{E}$.

Pour tout $x \in E$, on note $(x) \in C$ la suite constante égale à x. On définit $i : E \to \widehat{E}$ par $i(x) = \widehat{(x)}$. On a

$$\delta(i(x), i(y)) = \delta((x), (y)) = d(x,y),$$

c'est-à-dire i est isométrique, et c'est donc une injection.
Montrons que $i(E)$ est dense dans $\widehat{E}$. Soit $\widehat{U} \in \widehat{E}$ avec $U = (u_n)_n \in C$. Nous allons voir que $\widehat{U}$ est la limite de la suite $(i(u_n))_n$. Soit $\varepsilon > 0$, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc il existe $N > 0$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$. En fixant $p \geq N$, on en déduit

$$\delta(\widehat{U}, i(u_p)) = \delta(U, (u_p)) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

Et c'est vrai pour tout $p \geq N$, donc $\lim_{p\to\infty} i(u_p) = \widehat{U}$.

Montrer enfin que $\widehat{E}$ est complet :

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de Cauchy de $\widehat{E}$. Comme $i(E)$ est dense, pour tout n, il existe x_n dans E tel que $\delta(\alpha_n, i(x_n)) \leq \frac{1}{n}$. L'inégalité

$$d(x_p, x_q) = \delta(i(x_p), i(x_q)) \leq \delta(i(x_p), \alpha_p) + \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \delta(\alpha_q, i(x_q)) \leq \delta(\alpha_p, \alpha_q) + \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

montre que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E. On note α la classe de $(x_n)_n$ dans $\widehat{E}$. Montrons que $(\alpha_n)_n$ converge vers α dans $\widehat{E}$. Comme

$$\delta(\alpha_n, \alpha) \leq \delta(\alpha_n, i(x_n)) + \delta(i(x_n), \alpha) \leq \frac{1}{n} + \delta(i(x_n), \alpha),$$

il suffit de voir que $\lim_{n\to\infty} \delta(i(x_n), \alpha) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E, donc il existe $N > 0$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$. Alors, si on fixe $n \geq N$,

$$\delta(i(x_n), \alpha) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_p) \leq \varepsilon,$$

et ceci pour tout $n \geq N$, d'où le résultat.

□

Théorème 1.17. *Soient $(\widehat{E}_1, d_1)$ et $(\widehat{E}_2, d_2)$ deux complétés de E, c'est-à-dire qu'ils sont tous les deux complets et qu'il existe une isométrie i_1 (resp. i_2) de E dans $\widehat{E}_1$ (resp. dans $\widehat{E}_2$), avec $i_1(E)$ (resp. $i_2(E)$) dense dans E.*

Alors il existe une unique isométrie φ de $\widehat{E}_1$ dans $\widehat{E}_2$ bijective telle que $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Remarque. Par abus, on identifie souvent E et $i(E)$ dans $\widehat{E}$. Ainsi, $\widehat{E}$ est un espace complet dans lequel E est plongé et sa métrique prolonge celle de E.

Démonstration. On définit l'application φ sur $i_1(E)$ par $\varphi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$. Elle est isométrique sur $i_1(E)$ car $\forall x, y \in E$,

$$d_2(\varphi(i_1(x)), \varphi(i_1(y))) = d_2(i_2(x), i_2(y)) = d(x, y) = d_1(i_1(x), i_1(y)).$$

En particulier, φ est uniformément continue sur $i_1(E)$ dense dans E_1 et à valeurs dans E_2 complet. Par le théorème de prolongement, il existe un unique prolongement de φ sur E_1, encore noté φ, qui est uniformément continu sur E_1. Par continuité et densité, il est facile de voir que ce prolongement reste isométrique sur E_1 tout entier. En particulier, φ est injective.
Montrons que φ est surjective. Soient $\beta \in E_2$. Par densité de $i(E_2)$, il existe une suite $(\beta_n = i_2(x_n))_n$ de $i(E_2)$ qui converge vers β. De plus pour tous p, q,

$$d_1(i_1(x_p), i_1(x_q)) = d(x_p, x_q) = d_2(i_2(x_p), i_2(x_q)) = d_2(\beta_p, \beta_q).$$

La suite $(i_1(x_n))_n$ est donc de Cauchy dans E_1 complet, elle converge vers $\alpha \in E_1$. Comme φ est continue,

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \varphi(i_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} i_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

d'où la surjectivité. □

Nous finissons cette partie par un lien entre la compacité et la complétude.

Théorème 1.18. *Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement s'il est précompact (Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de cet espace par des boules (ouvertes) de rayon ε) et complet*

Démonstration. Suposons que (E,d) est compact alors (E,d) est précompact. Pour montrer que (E,d) est complet, il suffit d'utiliser que dans un tel espace, toute suite admet une sous-suite convergente et que lorsqu'une suite de Cauchy x admet une sous-suite convergente y, x converge (vers la limite de y). Pour la réciproque, on montre que dans un espace précompact toute suite a une suite extraite de Cauchy, qui va converger puisque (E,d) est complet, et donc toute suite a une valeur d'adhérence. Ainsi (E,d) sera compact. □

1.2 Espace vectoriel normé

Définition 1.19. *Un espace de Banach est un espace vectoriel sur une corps $\mathbb{K}$, normé, complet.*

Exemple. Les espaces $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{C}^N$, ℓ^1, où $\ell^1 = \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$, $C_0^0(\mathbb{R}^N)$ qui est l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, sont des espaces de Banach.

Proposition 1.20. *Soit X un ensemble, F un espace de Banach alors l'ensemble des fonctions bornées $(B(X,F), \| \|)$ est un Banach avec pour tout $f \in B(X,F)$, $\|f\| = sup_{x\in X}|f(x)|$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $B(X,F)$. Fixons $x \in X$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, l'inégalité $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|$ implique que la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F. Comme F est complet, la suite $(f_p(x))$ converge. Notons $f(x)$ sa limite.

L'application $f : X \longrightarrow F$ ainsi construite vérifie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$. Montrons que f est bornée. La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que : $\|f_n\| \leq M$ pour tout n. Si $x \in X$, on a donc $|f_n(x)| \leq M$ pour tout n, donc en passant à la limite $|f(x)| \leq M$. Ceci étant vrai pour tout x, f est bien bornée, i.e. $f \in B(X,F)$

Montrons maintenant que (f_n) tend vers f dans $B(X,F)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$. Ainsi, si on fixe un élément x quelconque de X, on a

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N,\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\| < \varepsilon \tag{2}$$

En fixant p dans l'assertion précédente et en faisant tendre q vers l'infini, on en déduit l'inégalité $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vraie pour tout $x \in X$, on a $\|f_p - f\| \leq \varepsilon$. Ceci étant vraie pour tout $p \geq N$, donc (f_p) converge vers f.

Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $B(X,F)$ converge, donc $B(X,F)$ est complet. □

Corollaire 1.21. *Soit X un ensemble, F un espace de Banach alors l'ensemble des fonctions continues bornées $(\mathcal{C}_b^0(X,F), \| \|_{+\infty})$ est un Banach.*

Démonstration. L'ensemble $(\mathcal{C}_b^0(X,F), \| \|_{+\infty})$ étant un fermé de $(B(X,F), \| \|_{+\infty})$ qui est complet, on en déduit que $(\mathcal{C}_b^0(X,F), \| \|_{+\infty})$ est donc un espace de Banach. □

Définition 1.22. *Soient $p \in \mathbb{R}$ où $1 \leq p < +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables tel que $\int_\Omega |f|^p < +\infty\}/\sim$ où $f \sim g$ si $f = g$ presque partout sur Ω*

Définition 1.23. $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurables tel que* $\exists C \in \mathbb{R} | f(x) \leq C$ *p.p. sur* $\Omega\}$

Théorème 1.24 (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Ceci étant un développement, nous en faisons la démonstration dans la partie développement. □

Théorème 1.25 (Théorème de Grothendieck)**.** *On suppose $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace probabilisé. (donc $\mu(\Omega) = 1$) Soit $1 \leqslant p < +\infty$.*
Tout sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ qui est inclus dans $L^\infty(\mu)$ est de dimension finie.

Démonstration. Ceci étant un développement, nous en faisons la démonstration dans la partie développement. □

Proposition 1.26. *Soit E un Banach et une application linéaire et continue $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $\|u\| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.*

Théorème 1.27. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Théorème 1.28. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Théorème 1.29. *Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ absolument convergente ($\sum_{n=0}^{+\infty} \|u^n\|$) est convergente*

Pour finir cette partie, on s'intéresse au problème de Cauchy qui est une application direct du théorème du point fixe de Picard et donc de la complétude :

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$ avec U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $(t_0, x_0) \in U$.

Définition 1.30. *On dit que f est localement lipschitzienne en X si pour tout $(t_1, x_1) \in U$, il existe un voisinage V de x_1, un voisinage W de t_1 et $k > 0$ tels que pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in W$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\|$.*

Théorème 1.31. *Si f est continue sur U et localement lipschitzienne en X, alors (3) admet une unique solution maximale.*

Démonstration. f est continue sur U donc (3) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))\mathrm{d}u. \tag{4}$$

Soit $V \in \mathcal{V}(x_0), W \in \mathcal{V}(t_0)$ et $k > 0$ comme dans la définition du caractère localement lipschitzien de f, on peut supposer $W \times V$ borné. On note $M := \sup_{W \times V} \|f\|$.

On se place sur un cylindre de sécurité : soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset V$ et soit $T > 0$ tel que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$. On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la norme infinie, il s'agit alors d'un espace complet.

On définit l'application Φ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ par

$$\Phi(Y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, Y(u))\mathrm{d}u.$$

Il faut d'abord que $\mathcal{F}$ soit stable par Φ.

$$\|\Phi(Y)(t) - x_0\| \leq |t - t_0|M \leq TM$$

donc en choisissant $T \leq \frac{r}{M}$, $\Phi(Y)$ est bien à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r)$ (ce choix garantit aussi que le cylindre considéré est bien un cylindre de sécurité).

Le but est maintenant de montrer que Φ admet un point fixe en utilisant le théorème de Picard. En effet, l'équation (4) implique qu'une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ est solution de (3) si et seulement si elle est point fixe de Φ.

On va montrer que Φ admet une itérée contractante. Soit $Y, Z \in \mathcal{F}$, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad \|\Phi^p(Y)(t) - \Phi^p(Z)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty.$$

Cette inégalité est vraie pour $p=0$ et

$$\begin{aligned}
\|\Phi^{p+1}(Y)(t)-\Phi^{p+1}(Z)(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(u,\Phi^p(Y)(u))-f(u,\Phi^p(Z)(u))\|\mathrm{d}u\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}k\|\Phi^p(Y)(u)-\Phi^p(Z)(u)\|\mathrm{d}u\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}k\frac{k^p|u-t_0|^p}{p!}\|Y-Z\|_\infty\mathrm{d}u\right| \\
&= \frac{k^{p+1}|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}\|Y-Z\|_\infty,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. On a donc, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tous $Y,Z\in\mathcal{F}$,

$$\|\Phi(Y)-\Phi(Z)\|_\infty \leq \frac{k^pT^p}{p!}\|Y-Z\|_\infty.$$

Or $\frac{k^pT^p}{p!}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$ donc il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{k^pT^p}{p!}<1$. D'après le théorème de point fixe de Picard, Φ admet un unique point fixe X sur $\mathcal{F}$, qui est donc l'unique solution de (3) sur $[t_0-T,t_0+T]$.

Cette solution se prolonge en une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements X_1 et X_2 sur deux intervalles I_1 et I_2. L'intervalle $I_1\cap I_2$ est non vide car il contient $[t_0-T,t_0+T]$. Soit J le plus grand intervalle inclus dans $I_1\cap I_2$ et contenant $[t_0-T,t_0+T]$ tel que $X_1=X_2$ sur J. Alors J est fermé dans $I_1\cap I_2$ car X_1-X_2 est continue. Si $J\neq I_1\cap I_2$, alors on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée en l'une des bornes de J et contredire la maximalité de J. Donc $J=I_1\cap I_2$, d'où on déduit $X_1=X_2$ sur $I_1\cap I_2$ et, par définition de solution maximale, $I_1=I_2$. Finalement, X se prolonge en une unique solution maximale. □

1.3 Théorème de Baire et applications

Dans cette partie nous allons présenté le théorème de Baire, suivi d'un bon nombre d'applications très utiles dans l'analyse fonctionnelle.

Théorème 1.32 (Lemme de Baire)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E.

Soit V un ouvert non vide de E, montrons que $V\cap(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n)\neq\varnothing$.

U_0 étant un ouvert dense, $U_0\cap V$ est un ouvert non vide donc il existe $r_0\leq 1$ et $x_0\in E$ tels que $\overline{B}(x_0,r_0)\subset U_0\cap V$.

Puis U_1 est un ouvert dense donc $U_1\cap B(x_0,r_0)$ est un ouvert non vide, donc il existe $r_1\leq\frac{1}{2}$ et $x_1\in E$ tels que $\overline{B}(x_1,r_1)\subset U_1\cap B(x_0,r_0)$.

On construit ainsi par récurrence une suite $(B(x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$r_n\leq\frac{1}{n}\text{ et }\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subset U_{n+1}\cap B(x_n,r_n)$$

Soit $n,m\geq k$, alors $x_n,x_m\in B(x_k,r_k)$ donc $d(x_n,x_m)\leq\frac{2}{k}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy, donc converge vers un élément x car E est complet.

De plus, pour tout $n,m\geq n,x_m\in B(x_n,r_n)$ donc $d(x_m,x_n)\leq r_n$. En faisant $m\to+\infty$, on obtient $d(x,x_n)\leq r_n$, *i.e.* $x\in\overline{B}(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})$.

D'où :

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

□

Proposition 1.33. *Un espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet.*

Proposition 1.34. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des points de continuité de la dérivée f' est dense dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.35. *L'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables sur $[0,1]$ est dense dans l'ensemble des applications continue sur $[0,1]$.*

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\Delta(2^p x)$ où Δ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique dont la restriction à $[0,1]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors f est continue et n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$

Le théorème de Baire valable dans tout espace métrique complet, l'est en particulier dans les espaces de Banach. Dans un espace de Banach, se rajoute à la complétude la structure d'espace vectoriel qui permet de définir les applications linéaires comme étant celles qui préservent cette structure algébrique. Le fait de disposer de la propriété de Baire dans les espaces de Banach va nous permettre d'obtenir d'importants résultats généraux sur les applications linéaires entre espaces de Banach.

Le premier de ceux-ci est le théorème de l'application ouverte qui est fondamental pour prouver la continuité de réciproques d'applications linéaires.

Théorème 1.36 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective, alors T est ouverte.*

Théorème 1.37 (Théorème de Banach)**.** *Si $T : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, continue et bijective alors T^{-1} est est continue.*

Un autre théorème important de l'analyse fonctionnelle est le théorème de Banach-Steinhaus, encore connu sous le nom de "principe de la borne supèrieure", qui permet de majorer uniformément les normes d'une famille d'opérateurs linéaires si cette famille est ponctuellement majorée.

Théorème 1.38 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient E un Banach, F un espace vectoriel normé. Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$,*
- *Ou bien : $(\|f\|)_{f\in H}$ est borné.*
- *Ou bien : $\exists x \in E$ tel que $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$*

Corollaire 1.39. *Soit $(f_n)_n$, une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$ (avec E un Banach et F un espace vectoriel normée quelconque) qui converge simplement vers une fonction $f : E \longrightarrow F$. Alors f est linéaire et continue.*

Corollaire 1.40. *Soit E_1, un Banach, E_2 un espace vectoriel normé. Soit $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues. Alors B est continue sur $E_1 \times E_2$.*

1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.41. *Un espace vectoriel est dit pré-hilbertien, s'il est muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.42. *Si de plus, il est complet pour la norme issue du produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert.*

Dans la suite H désignera un espace de Hilbert.

La notion de projection orthogonale dans un espace de Hilbert est une généralisation à la dimension infinie à la dimension infinie de la notion de projection orthogonale dans un espace euclidien ou hermitien.

Voici maintenant un des théorèmes centraux en analyse hilbertienne.

Théorème 1.43 (projection d'un convexe fermé dans un espace de Hilbert)**.** *Soit $x \in H$.*
Si C est un convexe fermé non-vide de H
Alors

- *Il existe un unique $p(x) \in C$ vérifiant $\|x - p(x)| = d(x, C)$.*
- *$p(x)$ est caractérisé par $\forall y \in C, \Re e\,(< x - p(x), y - p(x) >) \leq 0$.*
- *L'application $x \mapsto p(x)$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Commençons par montrer l'existence d'un tel projeté. Notons $d = d(x, C)$. Par définition de d et caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $lim_{n\to\infty}\|x - y_n\| = d$. On va montrer que y_n est de Cauchy (on voit bien la nécessité de complétude de C). Pour cela, soient $p, q \in \mathbb{N}$, et appliquons l'égalité du parallélogramme à $(x - y_p)$ et $(x - y_q)$.

$$\|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|(x - y_p) - (x - y_q)\|^2 = 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|y_p - y_q\|^2 &= 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - \|2x - y_p - y_q\|^2 \\
&= 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_p - y_q}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4d^2 \qquad \text{car } \frac{y_p - y_q}{2} \in C \text{ qui est convexe}
\end{aligned}$$

Par définition de (y_n), le terme de droite tend vers 0 lorsque $p, q \to \infty$. Donc (y_n) est de Cauchy. C est fermé dans E complet donc complet, donc (y_n) converge vers un certain $y \in C$ et, par continuité de la norme, $\|x - y\| = d(x, C)$.

Démontrons maintenant l'unicité du projeté. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $y, y' \in C$ distincts tels que $\|x - y\| = d(x, C) = \|x - y'\|$. D'après l'égalité de la médiane écrite un peu plus haut avec y et y', on a

$$\left\|x - \frac{y - y'}{2}\right\|^2 = \frac{\|x - y\|^2}{2} + \frac{\|x - y'\|^2}{2} - \frac{\|y - y'\|^2}{4} = d^2 - \frac{\|y - y'\|^2}{4} < d^2$$

Ceci est impossible par définition de d car, comme on l'a dit plus haut, $\frac{y-y'}{2} \in C$. D'où unicité du projeté, qu'on notera par la suite $p(x)$.

□

On raisonne encore en deux temps, en montrant que $p(x)$ vérifie la relation :

$$\Re e\,(< x - p(x), y - p(x) >) \leq 0$$

pour tout $y \in C$, puis qu'il est le seul à la vérifier. Posons donc $y \in C$. On a

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \|(x-p(x))-(y-p(x))\|^2 \\
&= \|x-p(x)\|^2 + \|y-p(x)\|^2 - 2\Re e < x-p(x), y-p(x) >
\end{aligned}$$

Donc $\forall y \in C$

$$\begin{aligned}
2\Re e < x-p(x), y-p(x) > &= \|x-p(x)\|^2 - \|x-y\|^2 + \|y-p(x)\|^2 \\
&\leq d - d + \|y-p(x)\|^2 \\
&\leq \|y-p(x)\|^2
\end{aligned}$$

Notons pour $t \in]0,1[$

$$y_t = ty + (1-t)p(x) \in C$$

On a alors $y_t - p(x) = t(y-p(x))$. Appliquons l'inégalité précédente en y_t :

$$\begin{aligned}
2\Re e < x-p(x), y_t-p(x) > &\leq \|y_t-p(x)\|^2 \\
2\Re e < x-p(x), t(y-p(x)) > &\leq \|t(y-p(x))\|^2 \\
2t\Re e < x-p(x), y-p(x) > &\leq t^2\|y-p(x)\|^2 \\
2\Re e < x-p(x), y-p(x) > &\leq t\|y-p(x)\|^2 \qquad \text{car } t \neq 0
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre t vers 0 pour obtenir l'inégalité recherchée.

Soit $y_0 \in C$ vérifiant $\forall y \in C, \Re e < x-y_0, y-y_0 > \leq 0$. Montrons que $y_0 = p(x)$. On a comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\|x-p(x)\|^2 &= \|(x-y_0)-(p(x)-y_0)\|^2 \\
&= \|x-y_0\|^2 + \|p(x)-y_0\|^2 - 2\Re e < x-y_0, p(x)-y_0 >
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\|x-y_0\|^2 = \|x-p(x)\|^2 \underbrace{+2\Re e < x-y_0, p(x)-y_0 >}_{\leq 0} \underbrace{-\|p(x)-y_0\|^2}_{\leq 0}$$

Donc $\|x-y_0\|^2 \leq d$. La seule possibilité est qu'il y ait égalité, d'où $y_0 = p(x)$.

$\square$

Soient $x, x' \in E$, de projetés respectifs $p(x)$ et $p(x')$. On cherche à montrer que p est 1-lipschitzienne ce qui revient à montrer, en termes moins savants, que $\|p(x)-p(x')\| \leq \|x-x'\|$. On a

$$\begin{aligned}
\|x-x'\|^2 &= \|p(x)-p(x')+r\|^2 \qquad \text{avec } r = x-x'-p(x)+p(x') \\
&= \|p(x)-p(x')\|^2 + \|r\|^2 + 2\Re e < r, p(x)-p(x') >
\end{aligned}$$

Or d'après (ii) on a

$$\begin{aligned}
\Re e < r, p(x) - p(x') > &= \Re e < x - x' - p(x) + p(x'), p(x) - p(x') > \\
&= \underbrace{\Re e < x - p(x), p(x) - p(x') >}_{\geq 0} \underbrace{- \Re e < x' - p(x'), p(x) - p(x') >}_{\geq 0} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\|x - x'\|^2 \geq \|p(x) - p(x')\|$$

$\square$

Définition 1.44. *Soit un ensemble $A \subset H$, on appelle orthogonal de A dans H, l'ensemble $A^\perp = \{y \in H, \forall x \in A, < x, y >= 0\}$*

Proposition 1.45. *Soit $A \subset H$, alors l'orthogonal de A, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H*

Proposition 1.46. *Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de H. Alors :*
- *$F + F^\perp = H$*
- *Si $x \in H$, la projection orthogonale sur F de x, $p_F(x)$ est égale à la projection de x (vue dans le théorème précédent) $p(x)$.*
- *$F = F^{\perp\perp}$*

Proposition 1.47. *Soit F une sous-espace vectoriel quelconque de H. Alors $\bar{F} = F^{\perp\perp}$*

Proposition 1.48. *Un sous-espace vectoriel F de H est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$*

Voici une autre théorème centrale de l'analyse hilbertienne :

Théorème 1.49 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit f une forme linéaire continue sur H, alors il existe un unique $y \in H$ tel que :*

$$\forall x \in H, f(x) = \langle y \,|\, x \rangle$$

Démonstration. $F := \ker f$ est fermé car f est continue.
- Existence : Si $F^\perp = \{0\}$, alors $(F^\perp)^\perp = F = H$ donc $f = 0$ et on prend $y = 0$.
  Sinon, soit $w \in F^\perp$ tel que $\|w\| = 1$.
  On a $f(w) \neq 0$ et pour $x \in H$,
  $$x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in \ker f = F$$
  Donc :
  $$\langle w \,|\, x - \frac{f(x)}{f(w)} w \rangle = 0$$
  D'où, pour $x \in H$,
  $$f(x) = f(x) \langle w \,|\, w \rangle = f(w) \langle w \,|\, x \rangle = \langle y \,|\, x \rangle$$
  en posant $y = \overline{f(w)} w$.
- Unicité : Soit $y_1, y_2 \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\langle y_1 \,|\, x \rangle = f(x) = \langle y_2 \,|\, x \rangle$. Alors en prenant $x = y_1 - y_2$, on obtient $\langle y_1 - y_2 \,|\, y_1 - y_2 \rangle = 0$, d'où $y_1 = y_2$.

$\square$

Corollaire 1.50. *Soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$, un endomorphisme continue de H. Alors il existe un unique $v \in \mathcal{L}_c(H), \forall x, y \in H, \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, v(y) \rangle$. L'endomorphisme v est appelée adjoint de u et noté u^**

Théorème 1.51 (Stampacchia)**.** *Considérons a une forme bilinéaire continue et coercive, soit K un convexe non vide fermé de H .Pour tout φ de H' il existe u dans K unique vérifiant*

$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$ *pour tout $v \in K$*

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$u \in K$ *et* $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}a(u,v) - \varphi(v)\right)$

Remarque. Le théorème de Stampacchia se révèle être un outil efficace pour l'étude de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques. Il donne en effet existence et unicité des solutions faibles. Il s'applique par exemple au problème de Dirichlet non homogène : f fonction fixée

$-\Delta(u) + u = f$ sur Ω inclus dans $\mathbb{R}^n$

$u = 0$ sur la frontière de Ω

Démonstration. Ceci étant un développement, nous en faisons la démonstration dans la partie développement. □

On a également comme application le théorème de Lax-Milgram, mais celui-ci peut se prouver simplement par des méthodes plus élémentaires.

Corollaire 1.52 (Lax-Milgram)**.** *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout φ de H' il existe un unique u dans H tel que $a(u,v) = \varphi(v)$ pour tout $v \in H$*

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par

- $u \in H$
- $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\right)$

2 Développements

Théorème 2.1 (Théorème de Riesz-Fischer)**.** *Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. – Étape 1 : Montrons que $L^\infty(\mu)$ est complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$.
Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k}$.
Donc il existe une famille $(E_{k,m,n})_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'ensembles μ-négligeables, vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_k, \forall x \in X\backslash E_{k,m,n}, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$$

On définit $E = \bigcup_{k,m,n\in\mathbb{N}^*} E_{k,m,n}$; et comme l'union est dénombrable : $\mu(E) = 0$.
Et donc, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_k, \forall x \in X\backslash E, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{5}$$

Puis $\forall x \in X\backslash E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$,
autrement dit : $\forall x \in X\backslash E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$.
Et comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge ; on note $f(x)$ sa limite.
On va montrer que la fonction f ainsi définie μ-presque partout est bien dans $L^\infty(\mu)$ et que c'est bien la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en norme $\|.\|_\infty$.
Par passage à la limite dans (5), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_k, \forall x \in X\backslash E, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$

Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_k, \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$.
Comme L^∞ est un espace vectoriel $f = f - f_n + f_n \in L^\infty(\mu)$ Donc : $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

– Étape 2 : Pour $p \in [1, +\infty[$, $\mathrm{L}^p(\mu)$ est également complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$.
On va en fait montrer qu'une sous-suite converge dans $L^p(\mu)$
En effet, prenons $\varepsilon > 0$.
Si d'une part : $\exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq K_0, \|f_{n_k} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
et d'autre part : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$,
Alors finalement, en posant $N = \max\{n_{K_0}, N_0\}$ on obtient : $\forall n \geq N, \|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$, et le théorème est prouvé.
Soit donc $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_k, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.
Notons désormais $\hat{f}_k$ pour f_{n_k}, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.
Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$: $g_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right|$. Comme (g_N) est une somme de termes positifs, c'est une suite croissante positive donc (g_N) converge simplement vers $g = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{\phi(k+1)} - f_{\phi(k)}|$ (éventuellement infini).
L'inégalité de Minkowski donne, pour tout n :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2$$

Les fonctions g_n étant à valeurs dans $[0,+\infty]$, on a :

$$\|g\|_p^p = \int_X |g(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_X \liminf_{n\to\infty} |g_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |g_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq 2^p.$$

Donc $g \in L^p(\mu)$.
Soit $x \in X \backslash E$, soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \forall n \geq m \geq N, \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_m(x)\right| &\leq \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n-1}(x)\right| + \ldots + \left|\hat{f}_{m+1}(x) - \hat{f}_m(x)\right| \\ &= g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in X\backslash E, \left(\hat{f}_n(x)\right)$ est une suite de Cauchy (car $(g_n(x))$ l'est) dans $\mathbb{C}$ qui est complet donc elle converge ; on note $\hat{f}(x)$ sa limite.
Par passage à la limite dans l'inégalité précédente en n (m reste fixe) :

$$\forall x \in X\backslash E, \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_m(x)\right|^p \leq (g(x) - g_{m-1}(x))^p \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_m(x)\right|^p \leq g(x)^p$ et $g \in L^p(\mu)$. Donc $(\hat{f} - \hat{f}_m) \in L^p(\mu)$. Comme L^p est un sous-espace vectoriel, on a bien $\hat{f} \in L^p(\mu)$.
Donc, par convergence dominée, il vient :

$$\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Théorème 2.2 (Théorème de Grothendieck). *On suppose* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *est un espace probabilisé. (donc* $\mu(\Omega) = 1$*) Soit* $1 \leqslant p < +\infty$.
Tout sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ *qui est inclus dans* $L^\infty(\mu)$ *est de dimension finie.*

Démonstration. Notre objectif est de se ramener à $L^2(\mu)$.
Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ inclus dans $L^\infty(\mu)$.

Etape 1 On montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p$.

On définit, comme $(S \subset L^\infty)$,

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (S, \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & (L^\infty, \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & f \end{array}$$

S est un sous-espace vectoriel fermé de L^p qui est complet donc S est complet.
S est donc un Banach (sous-espace vectoriel normé complet), L^∞ aussi et Φ est linéaire.
On peut donc appliquer le théorème du graphe fermé : pour montrer que Φ est continue, il suffit de montrer que son graphe est fermé.
Soit $(f_n, \Phi(f_n))$ une suite de son graphe qui converge vers (f, g).
On a $f \in S \subset L^p$ car S est fermé et $g \in L^\infty$ car L^∞ est un Banach.
$\Phi(f_n) = f_n$ et la convergence L^∞ implique la convergence L^p car μ est une mesure finie[1].
Donc, par unicité de la limite dans L^p, $g = f = \Phi(f)$.
Le graphe de Φ est ainsi fermé donc Φ est continue.
Il existe donc une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in S,\ \|f\|_\infty = ||\Phi(f)||_\infty \leqslant K \|f\|_p .$$

Etape 2 On montre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$.

Distinguons deux cas.
$\diamond$ Si $p < 2$ alors $1 < \frac{2}{p}$, et l'inégalité de Hölder implique

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \times 1 \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{2}{p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{p}{2}} \underbrace{\left(\int_\Omega 1^{\frac{2}{2-p}} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{2-p}{2}}}_{=\mu(\Omega)=1} \leqslant \|f\|_2^p .$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{p}$, on trouve

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_2 .$$

Ce qui donne le résultat annoncé en prenant $K = M$ $(\|f\|_\infty \leqslant K \|f\|_p \leqslant K \|f\|_2)$.

$\diamond$ Soit $p \geqslant 2$.
Par définition du supremum essentiel, il existe alors N un ensemble de mesure nulle tel que

$$\forall x \in \Omega \setminus N,\ |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty .$$

On obtient donc

$$\forall x \in \Omega \setminus N,\ |f(x)|^p = |f(x)|^{p-2} |f(x)|^2 \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2 .$$

On intègre ces inégalités sur $\Omega \setminus N$, ce qui revient exactement à intégrer sur Ω comme N est de mesure nulle.

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 .$$

1. $\|f_n - g\|_p^p = \int_\Omega (f_n - g)^p \leqslant \mu(\Omega) \|f_n - g\|_\infty^p = 1 \times \|f_n - g\|_\infty^p \to 0$

On utilise la question précédente pour obtenir :

$$\|f\|_\infty^p \leqslant K^p \|f\|_p^p \leqslant K^p \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2.$$

D'où,

$$\|f\|_\infty \leqslant K^{p/2} \|f\|_2.$$

◇ On prend alors $M = \max(K, K^{p/2})$.

$$\forall f \in S,\ \|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2.$$

Etape 3 On considère $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de fonctions de S. On suppose que cette famille est orthonormée de $L^2(\mu)$ ceci est possible car $S \subset L^2(\mu)$. En effet, comme $S \subset L^\infty(\mu)$ et que μ est finie, les L^p sont décroissants et $S \subset L^q(\mu)$ pour n'importe quel q.

Soit Q une partie dénombrable dense de $\mathbb{R}^n$ (possible par $\mathbb{R}$ séparable). Soient $c = (c_1, \ldots, c_n) \in Q^n$ et posons $f_c = \sum c_i f_i$.
On a,

$$\|f_c\|_\infty \leqslant M \|f_c\|_2 = M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore dans L^2 en utilisant le fait que (f_i) forment une famille orthonormée de L^2.
Puisque Q est dénombrable, il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mu(\Omega') = 1$ et tel que

$$\forall x \in \Omega',\ \forall c \in Q^n,\ |f_c(x)| \leqslant \|f_c\|_\infty.$$

Soit $x \in \Omega'$ fixé. Comme $c \mapsto f_c(x)$ est continue (polynomial en les c_i) sur $\mathbb{R}^n$, et comme Q est dense dans $\mathbb{R}^n$, on aura,

$$\forall x \in \Omega',\ \forall c \in \mathbb{R}^n,\ |f_c(x)| \leqslant \|f_c\|_\infty \leqslant M\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Etape 4 On en déduit que $n \leqslant M^2$.

On applique l'étape 3 avec $c_i = f_i(x)$,[2] et on élève au carré.
On trouve alors, pour tout $x \in \Omega'$,

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)^2\right)^2 \leqslant M^2 \sum_{i=1}^n f_i(x)^2.$$

Lorsque $\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)^2 \neq 0$, on simplifie :

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leqslant M^2,$$

2. Si on reprend les inégalités, cela est bien possible. Il suffit de garder en tête que x est fixé et que l'on considère $c_i = f_i(x)$ comme constante et f_i comme fonction. Si on pose $\varphi : t \mapsto \sum\limits_{i=1}^n f_i(x) f_i(t)$ (ie $\varphi = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x) f_i$). Alors, par exemple pour la première inégalité, pour tout t, $\left|\sum\limits_{i=1}^n f_i(x) f_i(t)\right| = |\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_\infty = \left\|\sum\limits_{i=1}^n f_i(x) f_i\right\|_\infty$. On peut appliquer a fortiori en $t = x$ et on a $\left|\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)^2\right| \leqslant \left\|\sum\limits_{i=1}^n f_i(x) f_i\right\|_\infty$. On peut faire ce procédé pour chaque inégalité.

et cette inégalité reste bien entendue vraie quand $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)^2 = 0$.
On intègre alors sur Ω', ce qui exactement pareil que d'intégrer sur Ω car Ω' est de mesure pleine. Et comme les f_i sont de norme 1 (ie $\int f_i{}^2 = 1$), on obtient

$$n = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \right) \, \mathrm{d}\mu \leqslant M^2 \int_\Omega 1 \, \mathrm{d}\mu = M^2 \mu(\Omega) = M^2.$$

Ce qui prouve l'étape 4.

Etape 5 (Conclusion)
Supposons par l'absurde S de dimension infinie. Si toutes les familles de S à $M^2 + 1$ éléments étaient liés, la dimension serait finie. Donc on peut trouver une famille libre à $M^2 + 1$ éléments. En orthonormalisant cette famille (Gram-Schmidt par exemple), on a une famille orthonormée à $M^2 + 1$ éléments. Absurde car le cardinal de la famille doit être inférieur à M^2 avec l'étape 4.
Donc S est bien de dimension finie.

□

Théorème 2.3 (Stampacchia). *Considérons a une forme bilinéaire continue et coercive, soit K un convexe non vide fermé de H .Pour tout φ de H' il existe u dans K unique vérifiant*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad \textit{pour tout } v \in K \tag{6}$$

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par
$u \in K$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = min_{v \in K}\left(\frac{1}{2}a(u,v) - \varphi(v)\right)$

Démonstration. Dans cette preuve, nous noterons le produit scalaire (.,.) et le crocher de dualité : <.,.>. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi \,|\, v \rangle = (f, v) \text{ pour tout } v \in H$$

D'autre part, pour tout $u \in H$ fixé tel que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, et grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe un élément de H, noté Au, tel que $a(u,v) = (Au, v) \forall v \in H$. Il est clair que A est un opérateur linéaire de H dans H et que :

$$|Au| \leq C|u| \text{ pour tout } u \in H$$

$$(Au, u) \geq \alpha |u|^2 \text{ pour tout } u \in H$$

Le problème 6 revient à trouver $u \in K$ tel que

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \text{ pour tout } v \in K$$

Soit $\rho > 0$ une constante qui sera fixée ultérieurement. L'inégalité précédente équivaut à

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0 \text{ pour tout } v \in K$$

i.e.

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$$

Pour tout $v \in K$, on pose $Sv = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Montrons que si $\rho > 0$ est convenablement choisi alors S est une contraction stricte, i.e. il existe $k < 1$ tel que :

$$|Sv_1 - Sv_2| \leq k|v_1 - v_2| \text{ pour tout } v_1, v_2 \in K$$

En effet, on a vu dans le théorème de projection sur sur un convexe fermé que la projection P_K est 1-lipschitzienne, on a donc :

$$\begin{aligned}
|Sv_1 - Sv_2| &\leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\| \\
|Sv_1 - Sv_2|^2 &\leq |v_1 - v_2|^2 - 2\rho(Av_1 - Av_2), v_1 - v_2) + \rho^2|Av_1 - Av_2|^2 \\
&\leq |v_1 - v_2|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)
\end{aligned}$$

Choisissons ρ de sorte que $k^2 = 1 + c^2\rho^2 - 2\alpha\rho < 1$ (prendre $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$). On en déduit que S est contractante sur le sous-espace complet (car fermé) K, le théorème de point fixe de Picard donne alors l'existence et l'unicité de u.

Supposons maintenant que la forme $a(u,v)$ est symétrique. Alors $a(u,v)$ définit un nouveau produit scalaire sur H et la norme associée $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme $|\ |$. Donc H est aussi un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. A nouveau, grâce au théorème de représentation de Riesz, on sait qu'il existe un unique $g \in H$ tel que

$$\varphi(v) = a(g, v) \text{ pour tout } v \in H$$

Alors 6 devient :

$$a(g - u, v - u) \leq 0 \text{ pour tout } v \in K \tag{7}$$

i.e. $u = P_K(g)$, projection au sens du produit scalaire défini par a. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, l'inégalité 7 équivaut à trouver $u \in K$ qui réalise :

$$min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci revient à minimiser sur K, $a(g-v, g-v)$ ou encore $a(v,v) - 2a(g,v)$, ou encore $\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$

Ainsi $u \in K$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = min_{v \in K}\left(\frac{1}{2}a(u,v) - \varphi(v)\right)$

□

3 Questions

Question.

Soit C_f l'ensemble des points de continuité de f, montrer que C_f est une intersection dénombrable d'ouverts. En déduire si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$?

Réponse.

On a

$$C_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n \quad \text{avec} \quad \Omega_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \eta > 0, (y, z) \in]x - \eta, x + \eta[^2 \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}\}$$

et Ω_n est ouvert.

Or $\mathbb{Q}$ n'est pas une intersection dénombrable d'ouverts. En effet, si $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$ avec Ω_n ouvert, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ &= \mathbb{Q} \cup (\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n^c) \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{R}$ est une union dénombrable de fermés. D'après le lemme de Baire, un de ces fermés est d'intérieur non vide, ce ne peut pas être les $\{x\}$ donc c'est un Ω_n^c, ce qui contredit la densité de $\mathbb{Q}$.

Il n'existe donc pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue exactement sur $\mathbb{Q}$

Question.

Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas un F_σ (réunion dénombrable de fermés)

Donner un exemple de fonction continue exactement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Réponse.

Supposons que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est réunion dénombrable de fermés. On a donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, F_n fermé et $\overset{\circ}{F_n} = \varnothing$ car $\overset{\circ}{F_n}$ est inclus dans l'Intérieur de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui est vide. Mais alors $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, o, peut écrire $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\}$ et $\overset{\circ}{\{x_n\}} = \varnothing$ ce qui entraîne que $\mathbb{R} = (\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x_n\})$ i.e. $\mathbb{R}$ serait réunion dénombrables de fermés d'Intérieurs vides. Mais ceci est impossible car le théorème de Baire affirme que puisque $\mathbb{R}$ est complet, au moins un de ces fermés est d'intérieur vide.

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc pour p, q tels que $p \wedge q = 1$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad |x - \frac{p}{q}| < \varepsilon.$$

On a alors $f(x)=0$ et $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$ donc f est discontinue sur $\mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Si (q_n) est bornée, il en existe une sous-suite constante $(q_{\varphi(n)})$ car elle est à valeurs entières et donc $(p_{\varphi(n)})$ est constante à partir d'un certain rang car à valeurs entières et convergente. Finalement, $x = \lim \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} \in \mathbb{Q}$.

Ceci est exclu donc (q_n) n'est pas bornée et donc $f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\frac{1}{q_n}$ converge vers 0, donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bibliographie

[1] Haïm BREZIS. *ANALYSE FONCTIONELLE Théorie et applications*. 2005.

[2] Xavier GOURDON. *Les Maths en tête ANALYSE*. 2008.

[3] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. 2009.