UNIVERSITÉ DE RENNES 1

TER

Théorème de Cartan Von-Neumann

Anthony OLLIVIER
Harmia SOILIHI

Professeur : Dominique CERVEAU

Janvier 2015 — Mai 2015

Table des matières

Remerciements

Nous aimerions remercier le professeur Dominique CERVEAU pour son aide et ses conseils réguliers tout au long de notre TER.

1 Introduction

Les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}$ et $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_{>0}$: ce sont des sous-variétés de $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on supposera que $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de ce TER est de généraliser cette propriété sur $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ en montrant un théorème important, dû à Van-Neumann et Cartan qui affirme qu'un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$.

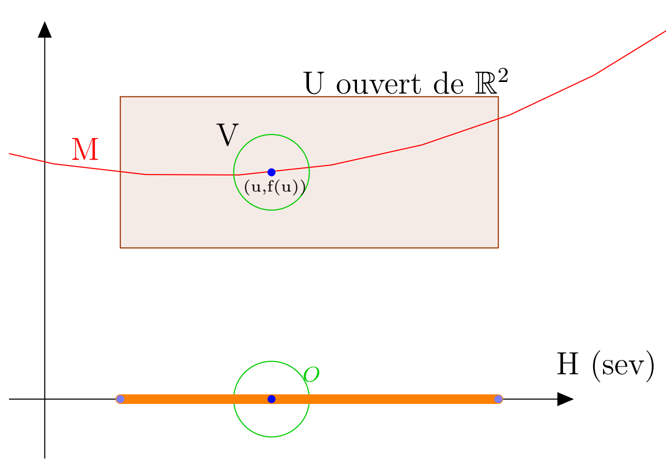
Nous allons tout de suite définir ce qu'est une sous-variété, mais d'abord, on rappelle la notion de difféomorphisme :

Définition 1.1.
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$; on dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ différentiable est un difféomorphisme si f est bijective et d'inverse différentiable.

Remarque.
-Deux ouverts U et V comme ci-dessus sont dits difféomorphes.

Définition 1.2.
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $M \subset U$ un sous-ensemble fermé. On dit que M est une sous-variété de U de dimension p si : pour tout x dans M, il existe V voisinage ouvert de x dans U, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et il existe $\phi : V \to O$ un difféomorphisme tel que : $\phi(V \cap M) = O \cap H$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.



On considère le difféomorphisme $\varphi : (u, v) \to (u, v - f(u))$, φ envoie le graphe de f sur l'axe des u. Les graphes des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-variétés de dimension 1 dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple. Soit n, un entier naturel non nul, la sphère S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque. Soit f un difféomorphisme de U dans V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si A est une partie de U alors A est une sous-variété de U si et seulement si $f(A)$ est une sous-variété de V.

On rappelle le théorème d'inversion locale qui nous sera utile pour un résultat ultérieur :

Théorème 1.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Si la différentielle de f en a $d_a f$ est inversible, alors il existe $V \subset U$ un voisinage ouvert de a et W voisinage ouvert de $f(a)$ tel que f soit un difféomorphisme de V dans W.*

Le but est donc de démontrer le théorème de Cartan-Van Neumann qui affirme qu'un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$.

2 Théorème de Cartan Von-Neumann sur quelques exemples

On veut montrer directement le théorème de Cartan Von-Neumann sur des exemples.

2.1 La fonction exponentielle

Définition 2.1.
On définit l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$$

Dans la suite, on utilisera la norme matricielle suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \|A\| = n \times \sup_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]} (|a_{ij}|)$$

où $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$

Remarque. La norme matricielle définie ci-dessus est sous-mutiplicative, c'est à dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

De plus, la série ci-dessus est normalement convergente pour la norme matricielle $\| \ \|$. L'application exponentielle est continue et à valeurs dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

2.2 Applications du théorème d'inversion locale

Proposition 2.2. *L'application exponentielle* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$, vérifie $d_0(\exp) = I$ et réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de I dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$*

Démonstration. Pour montrer que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, il suffit d'itérer le théorème de dérivation sous le signe somme (il y a convergence normale des séries dérivées à tout ordre). De plus, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\exp(H) = \sum_{k \geq 0} \frac{H^k}{k!} = I + H + O(\|H\|^2)$$

.

Donc $d_0(\exp) = I$. D'après le théorème d'inversion locale, l'exponentielle est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de I dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. □

On va énoncer le théorème de la submersion qui nous sera très utile pour montrer directement que certains exemples de sous-groupes fermés de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Théorème 2.3.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable, $p \leq n$. Soit $c \in \mathbb{R}^p$ On suppose que pour tout $m \in f^{-1}(c)$, la différentielle de f en m, $d_m f$ est de rang maximum p. Alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$.

Démonstration. Quitte à faire une translation, on peut supposer que c = 0.

Soient $m \in f^{-1}(0)$, $\mathcal{B}_{can}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaires, on peut supposer que :

$$Mat(d_m f, \mathcal{B}_{can}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{n colonnes}} \text{p lignes}$$

Notons pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, f_i, la ième coordonnée de f.

Soit $g : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ définie par :

$$g(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x), x_{p+1}, \cdots, x_n), \text{ où } x = (x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n)$$

Alors :

$$Mat(d_m g, \mathcal{B}_{can}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème d'inversion locale dit que g est un difféomorphisme sur un voisinage V de m dans un voisinage O de $0 = f(m)$. D'où g admet un inverse h et on a : $g \circ h(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$. En regardant sur les p premières composantes, on obtient :

$(f_1 \circ h(x), \cdots, f_p \circ h(x)) = (x_1, \cdots, x_p)$, i.e. $f \circ h(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_p)$.

On a : $(f \circ h)^{-1}(0) = \{(0, \cdots, 0, x_{p+1}, \cdots, x_n) : (x_{p+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-p}\}$
Comme $f \circ h$ est une application linéaire, l'espace $H = (f \circ h)^{-1}(0)$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$

Soient V et O comme ci-dessus, puis $H = h^{-1}(f^{-1}(0))$ et le difféomorphisme $h^{-1} : V \to O$, on a :

$$\begin{aligned} h^{-1}(V \cap f^{-1}(0)) &= h^{-1}(V) \cap h^{-1}(f^{-1}(0)) \\ &= O \cap H \end{aligned}$$

Comme m est arbitraire dans $f^{-1}(0)$, on reconnait bien la définition d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

On a donc montré que $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$.

$\square$

2.3 Exemples de sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$

On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.4.
Le sous-groupe $SL(n,\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2-1

Démonstration.

$SL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$. Notons E_n la matrice $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{n}$

On a : $\dfrac{det(I+tE_n)-det(I)}{t} = 1$

Donc det possède une dérivée partielle non nulle en I. D'où la différentielle de det en I est non nulle.

On en déduit par le théorème de composition des dérivées que $d_A det$ est non nulle pour tout A dans $SL(n,\mathbb{R})$.

Ainsi par le théorème de submersion, on conclut que $SL(n,\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1. $\square$

Proposition 2.5.
Le sous-groupe $O(n,\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Démonstration.
$O(n,\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}),\ \ {}^tXX = I\}$. Soit $S(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille $n\times n$. $S(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Considérons l'application f définie par : $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tXX \in S(n,\mathbb{R})$.

Soient $M,H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} {}^t(M+H)(M+H) &= {}^t(M+H)(M+H) \\ &= {}^tMM + {}^tMH + {}^tHM + {}^tHH \\ &= f(M) + {}^tMH + {}^tHM + o(H) \end{aligned}$$

Donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_Mf(H) = {}^tMH + {}^tHM$.

Soit M_0 un élément de $O(n,\mathbb{R})$ S un élément de $S(n,\mathbb{R})$ et $H_0 = \frac{1}{2}M_0S$.

Alors $d_{M_0}fH_0 = {}^tM_0(\dfrac{1}{2}M_0S) + \dfrac{1}{2}\,{}^t(M_0S)M_0 = \dfrac{1}{2}S + \dfrac{1}{2}S = S$ et $d_{M_0}f$ est surjective.

Ainsi, comme $O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(I)$, par le théorème de submersion $O(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

3 Preuve du cas général

3.1 Quelques lemmes préliminaires

A présent, nous allons démontrer le cas général du théorème de Cartan-Von Neumann.

Définition 3.1.
Si $A \in B(I,1)$, on appelle $\log(A)$ la somme de la série normalement convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1-I)^n}{n}$$

Proposition 3.2. *Pour tout A dans la boule $B(I,1)$ de centre I de rayon 1, on a :*

$$\exp(logA) = A$$

Démonstration. Idée : même chose que log(1+x) comme toutes les séries sont normalement convergentes et que les A^n commutent. □

Lemme 3.3.
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors on a :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n})\right]^n = \exp(X+Y)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n})\exp(-\frac{X}{n})\exp(-\frac{Y}{n})\right]^{n^2} = \exp(XY-YX)$

Démonstration.
On a :

$$\exp(\frac{X}{n}) = I + \frac{X}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

Donc :

$$\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n}) = I + \frac{X+Y}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

On peut appliquer log car pour n assez grand $\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n})$ est proche de I :

$$\log\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right) = \log\left(I + \frac{X+Y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc :

$$\exp\left(n\log\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(X+Y)$$

Ainsi, de la même façon,la fonction exp étant continue, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n})\exp(-\frac{X}{n})\exp(-\frac{Y}{n})\right]^{n^2}=\exp(XY-YX)$$

$\square$

3.2 Algèbre de Lie

La proposition suivante est essentielle dans la suite :

Proposition 3.4.
Soit G un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{G}=\{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exp(tX)\in G,\forall t\in\mathbb{R}\}$. Alors, $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par l'application $(X,Y)\mapsto XY-YX$: cette expression est appelée crochet de Lie.

Démonstration.
Soit $X\in\mathcal{G}$, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ tX\in\mathcal{G}$ Soient $X_1,X_2\in\mathcal{G}$. D'après le lemme précédent :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \exp\left(t(X_1+X_2)\right)=\lim_{k\to\infty}\underbrace{\left(\exp(\frac{tX_1}{k})\exp(\frac{tX_2}{k})\right)}_{\in G}$$

Comme G est fermé, on en déduit :

$$\forall t\in\mathbb{R}:\exp\left(t(X_1+X_2)\right)\in\mathcal{G}$$

Donc :

$$X_1+X_2\in\mathcal{G}$$

Comme $0\in\mathcal{G}$, on a bien que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $X,Y\in\mathcal{G}$, alors $XY-YX\in\mathcal{G}$, car :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\exp(\frac{X}{n})\exp(\frac{Y}{n})\exp(-\frac{X}{n})\exp(-\frac{Y}{n})\right]^{n^2}=\exp(XY-YX)$$

Ainsi $\mathcal{G}$ est stable par le crochet de Lie. $\square$

Définition 3.5. *L'espace vectoriel $\mathcal{G}=\{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\exp(tX)\in G,\forall t\in\mathbb{R}\}$ défini ci-dessus est appelé l'algèbre de Lie du groupe G*

Remarque. On remarque que l'élément neutre 0 est toujours dans $\mathcal{G}$. Il est clair que si G est discret alors $\mathcal{G}=\{0\}$ mais on ne sait pas encore si il y a dans $\mathcal{G}$ des éléments non nuls lorsque G n'est pas discret. C'est ce qu'on nous allons voir dans la suite.

3.3 Exemples d'algèbre de Lie

Voyons maintenant quelques exemples d'algèbre de Lie de sous groupes de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Exemple.
Supposons que G= {matrices diagonales inversibles}, or par définition :

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exp(tM) \in G,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Soit M une matrice diagonale quelconque, alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, exp(tM) est diagonale et inversible (car Im(exp) $\subset \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$) Donc $\mathcal{G} = \{$matrices diagonales quelconques $\}$

A présent, on s'intéresse au sous-groupe spécial linéaire de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Exemple. G=SL(n ;$\mathbb{R}$)
$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, det(exp(tM))=1, $\forall t \in \mathbb{R}\}$
On a :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, det(exp A)=exp(tr A)
D'où :
$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exp(tr(tM))=1 $\forall t \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ t \times$ tr(M) = 0 $\forall t \in \mathbb{R}\}$

Ainsi, l'algèbre de Lie du groupe SL(n ;$\mathbb{R}$) correspond à l'ensemble des matrices dont la trace est nulle.

Enfin, on étudie le sous-groupe orthogonal.

Exemple. G=O(n ;$\mathbb{R}$)
$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exp(sM)^t \exp(sM) = I\ \forall s \in \mathbb{R}\}$
Comme pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t\exp(A) = \exp({}^tA)$, on a :

$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exp(sM)\exp(s\ {}^tM) = I\ \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Pour M dans $\mathcal{G}$, on a :

$$\begin{aligned}\exp(sM)\exp(s\ {}^tM) = I &\Leftrightarrow (I + sM + \frac{s^2}{2}M + ...)(I + s\ {}^tM + \frac{s^2}{2}\ {}^tM + ...) = I \\ &\Leftrightarrow I + s(M +\ {}^tM) + \frac{s^2}{2}(M +\ {}^tM) + ... = I\end{aligned}$$

Ainsi $M = -{}^tM$.

Donc, l'algèbre de Lie du groupe orthogonal s'identifie à l'ensemble des matrices anti-symétriques.

3.4 Preuve du théorème de Cartan-Von-Neumann

Théorème 3.6. *Si G est un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathcal{G}$, un voisinage W de I dans G tel que l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre V et W.*

Dans la suite, on supposera G non discret, connexe et naturellement fermé (si G n'est pas connexe, on s'y ramène en considérant la composante connexe de l'identité).

Avant de démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soit $(h_n)_n$ une suite d'éléments de G tendant vers I telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \neq I$. Si h est une valeur d'adhérence de la suite $\left(\dfrac{\log h_n}{\|\log h_n\|}\right)_n$, alors $h \in \mathcal{G}$.*

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\dfrac{\log h_n}{\|\log h_n\|}$ converge vers h, soit $t \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(th) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(t\dfrac{\log h_n}{\|\log h_n\|}\right)$ par continuité de l'application exp.

$\dfrac{t}{\|\log(h_n)\|} = P_n + V_n$ où P_n est la partie entière de $\dfrac{t}{\log(h_n)}$ et V_n appartient à [0,1[

Alors :

$$\exp\left(t\frac{\log(h_n)}{\|\log(h_n)\|}\right) = h_n^{P_n} \times \exp(V_n \log(h_n))$$

.

Enfin : $\|V_n \log(h_n)\| \leq \|\log(h_n)\|$ qui tend vers 0, donc $\exp\left(V_n \log(h_n)\right)$ tend vers I et $\exp(th) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n^{P_n}$ est une limite d'élément de G, donc un élément de G. Ainsi comme t est arbitraire dans $\mathbb{R}$, on a : $h \in \mathcal{G}$ □

Démonstration. Démonstration du théorème :
Soit $\mathcal{G}'$ un supplémentaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}'$, noté V' tel que $\exp(V') \cap G = \{I\}$

En effet, sinon il existerait un voisinage W_0 de 0 dans $\mathcal{G}'$, que l'on pourrait choisir compact et étoilé par rapport à 0 et tel que pour tout entier non nul n,

$$\exp\left(\frac{W_0}{n}\right) \cap G \neq \{I\}$$

Soit $h_n = \exp\left(\dfrac{X'_n}{n}\right)$ avec $X'_n \in W_0,\ h_n \in G \setminus \{I\}$.

La suite $(h_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers I puisque $\dfrac{X'_n}{n}$ tend vers 0 et, par suite, pour n assez grand :

$\dfrac{\log h_n}{\|\log h_n\|} = \dfrac{X'_n}{\|X'_n\|}$ possède une sous-suite convergente vers h, qui appartient à la boule unité de $\mathcal{G}'$ et qui appartient aussi à $\mathcal{G}$ par le lemme précédent, ce qui est absurde.

Définissons une application φ : $\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G}l_n(\mathbb{R}) \\ (X, X') & \longmapsto & \exp(X)\exp(X') \end{array}$

Alors $\varphi(X, X') = I + X + X' + o(\sqrt{\|X\|^2 + \|X'\|^2})$, lorsque $(X, X') \to (0, 0)$ d'où la différentielle de φ en $(0, 0)$ est l'application : $(X, X') \longmapsto X + X'$; elle est donc bijective.

Le théorème d'inversion locale permet donc d'affirmer l'existence de U voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$, U' voisinage de 0 dans $\mathcal{G}'$ et V voisinage de I dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ tel que φ réalise un difféomorphisme entre $U \times U'$ et V.

Montrons que $\exp(U)$ est un voisinage de I dans G.

Soit $U_1 = U' \cap V'$ (où V' a été défini au-dessus), c'est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}'$.

Et soit $V_1 = \varphi(U \times U_1)$; c'est un voisinage de I dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et l'application φ réalise une difféomorphisme entre $U \times U_1$ et V_1.

On a l'inclusion $\exp(U) \subset V_1 \cap G$, car U_1 est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}'$ et $V_1 = \varphi(U \times U_1)$ et $\exp(U) \subset G$ car $U \subset \mathcal{G}$ donc $\exp(U) \subset V_1 \cap G$.

Puis, $\exp(V') \cap G = \{I\}$, donc $\exp(U' \cap V') \cap G \subset \{I\}$, $\exp(U_1) \cap G \subset \{I\}$.

D'où $\exp(U) \exp(U_1) \cap G \subset \exp(U)$ $(\exp(U) \subset G)$. Donc $V_1 \cap G \subset \exp(U)$. Ainsi $V_1 \cap G = \exp U$.

Donc $\exp(U)$ est un voisinage de I dans G.

En résumé, on a trouvé un voisinage U de 0 dans $\mathcal{G}$ et un voisinage W $(= \exp(U))$ de I dans G tel que l'exponentielle réalise un homomorphisme entre V et W.

Le théorème est donc démontré. □

Théorème 3.8. *Cartan Von-Neumann :*
Tout sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$

Démonstration. On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

Pour $x = I$, on a par le théorème précédent que : il existe un voisinage O de 0 dans $\mathcal{G}$ (i.e. : $O \cap \mathcal{G}$ voisinage de 0 dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$), il existe un voisinage V de x $(= I)$ dans G et soit $\phi = \exp$. Alors :

$$\phi(O \cap \mathcal{G}) = V \cap G$$

.

Comme $X \longmapsto PX$ est un difféomorphisme pour tout $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, on en déduit que le résultat reste vrai pour tout $x \in G$.

Par conséquent G est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension égale à $dim(\mathcal{G})$.
□

Bibliographie

[1] Mneimné Rached et Testard Frédéric. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. 1997.