155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Dans la suite, E désignera un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,E)$

I) Outils pour la diagonalisation

Def 1 : On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ si $f - \alpha Id_E$ est non injective.

Def 2 : Soit λ une valeur propre de f. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f, appelé sous-espace propre de f associée à la valeur propre λ.

Un éléments non nul de E_λ est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Thm 3 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de f, distincts deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Def 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P_A(X) = \det(A - XI_n)$

Thm-def 5 : Le polynôme caractéristique de la matrice qui représente f dans une base de E est indépendant du choix de cette base, on l'appelle polynôme caractéristique de f on on le note χ_f ou P_f.

Prop 6 : λ est valeur propre de f si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$

Corollaire 7 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, f admet au moins une valeur propre.

Prop 8 : f et ${}^t f$ ont le même polynôme caractéristique.

Prop 9 : Soit F un sous-espace vectoriel strict de E ($F \neq E$, $F \neq \{0\}$) stable par f. Soit $g = f_{|F}$ la restriction de f à F. Alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et P_g divise P_f.

Def 10 : L'endomorphisme f est dit diagonalisable si il existe une base de vecteurs propres de f.

Def 11 : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

II) Critères de diagonalisation

Prop 12 : Si P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, Alors f est diagonalisable.

Prop 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de P_f d'ordre de multiplicité h, alors $\dim E_\lambda \leq h$

Thm 14 : les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable

(ii) P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de P_f d'ordre de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f vérifiant
$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

Corollaire 15 : Si f admet n valeurs propres distincts (deux à deux) alors f est diagonalisable.

Prop 16 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$. Si λ est valeur propre de f. Alors $P(\lambda) = 0$

Prop 17 : (décomposition des noyaux)

Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, (P_i) étant premiers entre eux (deux à deux)

Alors : $\operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker} P_k(f)$

Thm 18 : L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ ayant toutes ses racines simples tel que $P(f) = 0$.

Corollaire 19 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Def 20 : f est dit trigonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Thm 21 : f est trigonalisable si et seulement si P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Thm 22 : (Cayley-Hamilton) $P_f(f) = 0$

Prop-déf 23 : Soit le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $\varphi_f : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array}$

Il existe un unique polynôme unitaire π_f qui engendre $\ker \varphi_f$ que l'on appelle le polynôme minimal de u.

Corollaire 24 : $\pi_f \mid P_f$

Thm 25 : les racines de $\pi_f(X)$ sont exactement les racines de $P_f(X)$

Thm 26 : f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé, à racines simples.

Prop 27 : Si $|\mathbb{K}| = q \in \mathbb{N}^*$ alors f est diagonalisable $\Leftrightarrow f^q = f$

Thm 28 : Soit $n \geq 1$ un entier. Alors le nombre de matrices diagonalisables dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur le corps $\mathbb{F}_q$ est égale à

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1}) \\ n_1+\dots+n_{q-1}=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

III) Exemples

Ex 29 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et donc $\mathbb{C}$) car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ admet 3 racines distincts.

Ex 30 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2$ et $\dim E_{-2} = 2$

Ex 31 : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ et $\dim E_1 = 1 < 2$.

Ex 32 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+3\lambda+3)$

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $m_A(X) = (X+2)(X-1)$

Ex 34 : $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(X) = -(X-1)^3$ d'où $m_A(X) = \begin{cases} X-1 \\ \text{ou } (X-1)^2 \\ \text{ou } (X-1)^3 \end{cases}$ et A diag $\Leftrightarrow m_A(X) = X-1 \Leftrightarrow A - I = 0$

Ex 35 : les homothéties (λId) sont diagonalisables.

Ex 36 : les symétries ($s \in GL_n(\mathbb{R})$, $s^2 = Id$) sont diagonalisables

Ex 37 : les projections ($p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p^2 = p$) sont diagonalisables

Ex 38 : les dilatations ($u \in GL_n(\mathbb{R})$, $u_{|H} = Id$ et $\det(u) = \lambda \neq 1$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$) sont diagonalisables.

Ex 39 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} f \neq 0$.

Ex 40 : Soient $a_1, \dots, a_{n-1}$ et $b_1, \dots, b_{n-1}$ des réels, avec $n \geq 3$. Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = 0$ ou $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$

Notation 41 : $M^* = \begin{cases} {}^tM \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ {}^t\overline{M} \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{cases}$

Thm 42 : Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$, un automorphisme autoadjoints. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f, et de plus ses valeurs propres sont réelles.

Corollaire 43 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors il existe C orthogonale (resp unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ où D matrice diagonale réelle.

Thm 44 : Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise u, et toutes les valeurs propres de u ont leur module égal à 1.

Thm 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

(i) u est normal (u et u^* commutent)

(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) u et u^* se diagonalise dans une base orthonormale quelconque.

Thm 22 : (Cayley-Hamilton) $P_f(f) = 0$

Prop-déf 23 : Soit le morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre $\varphi_f : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto P(f) \end{array}$

Il existe un unique polynôme unitaire π_f qui engendre $\operatorname{Ker} \varphi_f$ que l'on appelle le polynôme minimal de u.

Corollaire 24 : $\pi_f \mid P_f$

Thm 25 : Les racines de $\pi_f(X)$ sont exactement les racines de $P_f(X)$

Thm 26 : f est diagonalisable si et seulement si son polynômes minimal est scindé, à racines simples.

Prop 27 : Si $|\mathbb{K}| = q \in \mathbb{N}^*$ alors f est diagonalisable $\iff f^q = f$

Thm 28 : Soit $n \geq 1$ un entier. Alors le nombre de matrices diagonalisables dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur le corps $\mathbb{F}_q$ est égale à

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1}) \\ n_1+\dots+n_{q-1}=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)|\cdots|GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$$

III) Exemples

Ex 29 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et dans $\mathbb{C}$) car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ admet 3 racines distincts.

Ex 30 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$ et $\dim E_{-2} = 2$

Ex 31 : $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est ni diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ et $\dim E_1 = 1 < 2$.

Ex 32 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais elle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+3\lambda+3)$

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $m_A(X) = (X+2)(X-1)$

Ex 34 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car $P_A(X) = -(X-1)^3$ d'où $m_A(X) = \begin{cases} X-1 \\ \text{ou } (X-1)^2 \\ \text{ou } (X-1)^3 \end{cases}$ et A diag $\iff m_A(X) = X-1 \iff A - I = 0$

Ex 35 : Les homothéties (λId) sont diagonalisables.

Ex 36 : Les symétries ($s \in GL_n(\mathbb{R})$, $s^2 = Id$) sont diagonalisables

Ex 37 : Les projections ($p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p^2 = p$) sont diagonalisables

Ex 38 : Les dilatations ($u \in GL_n(\mathbb{R})$, $u_{|H} = Id$ et $\det(u) = \lambda \neq 1$ où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$) sont diagonalisables.

Ex 39 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} f \neq 0$.

Ex 40 : Soient $a_1, \dots, a_{n-1}$ et $b_1, \dots, b_{n-1}$ des réels, avec $n \geq 3$. Alors

$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = 0$ ou $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i > 0$

Notation 41 : $M^* = \begin{cases} {}^tM \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ {}^t\overline{M} \text{ si } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \end{cases}$

Thm 42 : Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$, un automorphisme autoadjoints. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres de f, et de plus ses valeurs propres sont réelles.

Corollaire 43 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors il existe C orthogonale (resp. unitaire) telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ où D matrice diagonale réelle.

Thm 44 : Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme unitaire. Alors il existe une base orthonormale qui diagonalise u, et toutes les valeurs propres de u ont leur module égal à 1.

Thm 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

(i) u est normal (u et u^* commutent)

(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) u et u^* se diagonalise dans une base orthonormale quelconque.

Thm 46 : Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe une base orthogonale B de E telle que :

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{l} \forall i,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \forall j,\ \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Thm 47 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant $M^* + M = 0$. Alors $\exists U$ unitaire telle que $U^{-1}MU = U^*MU = D$ soit diagonale et les coefficients de D sont imaginaires purs.

Thm 48 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, alors $\exists P$ orthogonale telle que

$$P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}$$

IV) Applications :

Thm 49 : L'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Prop 50 : Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
$g \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow \Phi = \{\varphi^{-1} g \varphi \mid \varphi \in GL(E)\}$ est fermé.

Application 51 : Calcul de la puissance d'une matrice :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, $\exists P \in Gl_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tq $A^n = PD^nP^{-1}$

Application 52 : Résolution d'un système de suite récurrente :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \ ;\ u_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \ ;\ v_0 = 1 \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, d'où $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $X_n = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Application 53 : Système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$
a) On diagonalise A en $A' = P^{-1}AP$ diagonale
b) On résout $\frac{dX'}{dt} = AX'$
c) On revient à X par $X = PX'$

Thm 54 : (Dunford) :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente tel que :
(i) $f = d + n$
(ii) $n \circ d = d \circ n$

DEV

Lemme 55 : Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent, il existe une base commune de diagonalisation de f et g (on dit que f et g sont alors codiagonalisable).

Déf 56 : Soit $f \in \mathcal{L}_C(E)$, l'endomorphisme $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$ s'appelle l'exponentielle de f et est noté $\exp(f)$

Prop 57 : Soient $u \in \mathcal{L}_C(E)$, $v \in \mathcal{L}_C(E)$ inversible avec $v^{-1} \in \mathcal{L}_C(E)$. Alors
$\exp(v^{-1}uv) = v^{-1}\exp(u)v$

Thm 58 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable ssi $\exp(u)$ est diagonalisable.

Lemme 59 : Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\forall k \geq 1$, $Tr(A^k) = 0$
Alors A est nilpotente

DEV

Thm 60 : (Burnside)
Soit $G < Gl_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini $\Leftrightarrow$ G est d'exposant fini

Thm 61 : Soit G un groupe fini, alors pour toute représentation ρ de G, les éléments de $Im(\rho)$ sont diagonalisables.

Corollaire 62 : Si de plus, G est abélien, alors ces éléments sont codiagonalisable.

Déf 63 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction
On définit la transformée de Fourier discrète (TFD) de l'échantillon $f = \{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$ comme étant le vecteur $\hat{f} = \{\hat{f}[k]\}_{k=0}^{N-1}$

avec $\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \omega_N^{-nk}$ pour $k = 0, \dots, N-1$

où $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$

Thm 64 : La transformée de Fourier discrète est diagonalisable en base orthonormée de $\mathbb{C}^N$

Thm 65 : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ réduite (tel que le seul nilpotent est 0). Alors les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

DEV

Références: GOURDON "Algèbre"
GRIFONE "Algèbre linéaire"
BECK "Objectif Agrégation"
PEYRE "Transformée de Fourier discrète"